

**Heegaard-Zerlegungen der Außenräume von
2-Brückenknoten und Nielsen-Äquivalenzklassen
der Gruppendarstellungen**

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

vorgelegt von

Johannes Tipp

Bochum 1989

**Heegaard-Zerlegungen der Außenräume von
2-Brückenknoten und Nielsen-Äquivalenzklassen
der Gruppendarstellungen**

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

vorgelegt von

Johannes Tipp

Bochum 1989

Hochschul-Zeitungen der Aufklärung von
3-Blickkennzeichen und Neben-Äußerungen
der Gruppenleistungen

Erklärung

Die Zeitungen der Aufklärung von
3-Blickkennzeichen und Neben-Äußerungen
sind in der Zeitungs- und
in der Zeitungs- und

Erklärung von
3-Blickkennzeichen und Neben-Äußerungen

Dissertation eingereicht am	31.1.1989
Tag der mündlichen Prüfung	21.4.1989
Referent	Prof. Dr. H. Zieschang
Korreferent	Prof. Dr. B. Zimmermann

Abstract

In dieser Arbeit geht es um nicht Nielsen-äquivalente Darstellungen von 2-Brückenknotengruppen mit zwei Erzeugenden und einer definierenden Relation und um nicht homöomorphe Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2 der Knotenaußenräume.

Es werden vier Klassen von 2-Brückenknoten $b(\alpha, \beta)$ untersucht und für jede Knotengruppe eine untere Schranke für die Anzahl nicht Nielsen-äquivalenter Gruppendarstellungen mit zwei Erzeugenden und einer definierenden Relation angegeben, die von α bzw. β abhängt. Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es einen 2-Brückenknoten, dessen Gruppe mindestens n nicht Nielsen-äquivalente Darstellungen mit zwei Erzeugenden und einer definierenden Relation besitzt.

Die meisten der gefundenen Gruppendarstellungen sind nicht geometrisch. Die Außenräume der betrachteten 2-Brückenknoten besitzen mindestens zwei, drei bzw. vier nicht homöomorphe Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2.

Inhalt

0. Einleitung	1
1. Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2 eines Knoten- außenraumes	6
2. Vier Klassen von 2-Brückenknoten	15
2.1 Die Klasse 1.1	16
2.1.1 Gruppendarstellungen der Knoten der Klasse 1.1	17
2.1.2 N -Äquivalenzklassen der Gruppendarstellungen	25
2.2 Die Klasse 1.2	31
2.2.1 Gruppendarstellungen der Knoten der Klasse 1.2	32
2.2.2 N -Äquivalenzklassen der Gruppendarstellungen	38
2.3 Die Klasse 2.1	41
2.3.1 Gruppendarstellungen der Knoten der Klasse 2.1	42
2.3.2 N -Äquivalenzklassen der Gruppendarstellungen	50
2.4 Die Klasse 2.2	55
2.4.1 Gruppendarstellungen der Knoten der Klasse 2.2	56
2.4.2 N -Äquivalenzklassen der Gruppendarstellungen	63
2.5 Zusammenfassung	67
2.6 Die Knoten der Klassen 1.1, 1.2, 2.1 und 2.2	70
2.6.1 Twistknoten	71
2.6.2 Brezelknoten	75
2.6.3 Die „Größe“ der vier Knotenklassen	89
3. Realisierbarkeit der Relatoren als einfach geschlossene Kurven	92
3.1 Einfach geschlossene Kurven auf einem Henkelkörper vom Geschlecht 2	92

3.2	Die Realisierbarkeit der Relatoren	95
3.2.1	Die Relatoren der Klasse 1.1	96
3.2.2	Die Relatoren der Klasse 1.2	97
3.2.3	Die Relatoren der Klasse 2.1	97
3.2.4	Die Relatoren der Klasse 2.2	98
3.3	Zusammenfassung	99
4.	Heegaard-Zerlegungen der Knotenaußenräume	101
4.1	Heegaard-Zerlegungen	101
4.2	Heegaard-Zerlegungen der vier Knotenklassen	107
4.2.1	Die Knoten der Klasse 1.1	107
4.2.2	Die Knoten der Klasse 1.2	118
4.2.3	Die Knoten der Klasse 2.1	124
4.2.4	Die Knoten der Klasse 2.2	133
4.3	Zusammenfassung	142
	Literatur	146

Einleitung

Heegaard-Zerlegungen stellen eine Möglichkeit dar, den Außenraum eines Knotens aus einem Henkelkörper vom Geschlecht g und $g - 1$ 2-Henkeln zu konstruieren, die längs $g - 1$ einfach geschlossener Kurven auf die Oberfläche des Henkelkörpers geklebt werden. Jeder Knotenaußenraum besitzt eine Heegaard-Zerlegung, vgl. [Osb, Th. 2.1]. Gleichzeitig ergibt sich das Problem, die Heegaard-Zerlegungen mit einem Henkelkörper vom Geschlecht g eines gegebenen Knotenaußenraums zu klassifizieren. Zwei Heegaard-Zerlegungen mit Henkelkörpern vom Geschlecht g heißen homöomorph, wenn es einen Homöomorphismus des Knotenaußenraumes gibt, der den Henkelkörper der einen Zerlegung auf den Henkelkörper der anderen Zerlegung abbildet.

In [BRZ] werden die Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2 der Außenräume von Torusknoten klassifiziert. Die zu homöomorphen Heegaard-Zerlegungen gehörenden Darstellungen der Knotengruppe sind N -äquivalent, deshalb ergibt sich ein Zugang zur Homöomorphieklassifikation der Heegaard-Zerlegungen aus der Bestimmung und Einteilung der Darstellungen der Knotengruppe in N -Äquivalenzklassen. Bei Gruppen von Torusknoten können beliebig (aber endlich) viele N -Äquivalenzklassen von Darstellungen mit zwei Erzeugenden und einer definierenden Relation auftreten, aber die meisten dieser Gruppendarstellungen sind nicht geometrisch, d.h. sie stammen nicht von Heegaard-Zerlegungen. Der Außenraum eines Torusknotens $t(p, q)$ besitzt schließlich abhängig von p und q genau eine, zwei oder drei nicht homöomorphe Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2.

Für eine weitere große Klasse von Knoten, die 2-Brückenknoten, gibt es in diesem Zusammenhang eine Arbeit von Funcke. Nach [Fu] sind die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ der Gruppe eines 2-Brückenknotens $b(\alpha, \beta) = b(\alpha, \beta')$ nicht N -äquivalent, falls $\beta' \neq \pm\beta$ ist, wobei $\beta\beta' \equiv 1 \pmod{2\alpha}$ und $\beta, \beta' \in (-\alpha, \alpha)$. Diese Gruppendarstellungen sind auch geometrisch; in diesen Fällen existieren also mindestens zwei nicht homöomorphe Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2 des Knotenaußenraums.

Im Fall der Torusknoten läßt sich aufgrund der Struktur der Knotengruppen $\langle x_1, x_2 \mid x_1^p x_2^{-q} \rangle$ als freies Produkt mit einem Amalgam, das Normalteiler in beiden Faktoren ist, zeigen, daß es in jeder N -Äquivalenzklasse eine Gruppendarstellung mit einem Erzeugendenpaar der Form (x_1^r, x_2^s) gibt, vgl. [McP]. Dieser Satz ist die Grundlage für die genaue Bestimmung aller N -Äquivalenzklassen. Nach Aussortieren der Erzeugendenpaare, die nicht zu 1-Relatordarstellungen führen, Einteilung der übrigen Gruppendarstellungen in N -Äquivalenzklassen [C], [Z 77] und Aussortieren der Gruppendarstellungen, die nicht geometrisch sind, erhält man eine Aussage über die genaue Anzahl nicht homöomorpher Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2; in [BRZ] werden außerdem die Heegaard-Zerlegungen angegeben.

Die oben genannte Struktur besitzen die Gruppen der 2-Brückenknoten i.a. nicht und ein ähnlicher Satz über die N -Äquivalenzklassen steht nicht zur Verfügung, zudem sind die Relatoren unübersichtlicher; es bietet sich daher an, spezielle Klassen von 2-Brückenknoten mit einer für das Problem der Existenz von N -Äquivalenzklassen günstigen Gruppendarstellung zu betrachten. In dieser Arbeit werden vier Klassen von 2-Brückenknoten untersucht. Diese vier Klassen 1.1, 1.2, 2.1 und 2.2 sollen definitionsgemäß

die 2-Brückenknoten $b(\alpha, \beta) = b(\alpha, \beta')$ mit den folgenden Normalformen (α, β) bzw. (α, β') enthalten:

Klasse 1.1

$$(\alpha, \beta) = (p|\sigma| - 1, \frac{\sigma}{2})$$

$$\beta' = \begin{cases} -\alpha + 2p, & \frac{\sigma}{2} > 0 \\ \alpha - 2p, & \frac{\sigma}{2} < 0 \end{cases}$$

mit $p > 1, \frac{\sigma}{2} \in \mathbb{Z}$ ungerade, $|\sigma| > 2$.

Klasse 1.2

$$(\alpha, \beta) = (p|\sigma| + 1, \frac{\sigma}{2})$$

$$\beta' = \begin{cases} \alpha - 2p, & \frac{\sigma}{2} > 0 \\ -\alpha + 2p, & \frac{\sigma}{2} < 0 \end{cases}$$

mit $p > 1, \frac{\sigma}{2} \in \mathbb{Z}$ ungerade, $|\sigma| > 2$.

Klasse 2.1

$$(\alpha, \beta) = (p\sigma + 1, \alpha - \frac{\sigma}{2})$$

$$\beta' = -\alpha + 2p$$

mit $p \geq 1, \frac{\sigma}{2} \geq 2$ gerade.

Klasse 2.2

$$(\alpha, \beta) = (p\sigma - 1, \alpha - \frac{\sigma}{2}) \text{ und } (\alpha, -\beta)$$

$$\beta' = \alpha - 2p$$

mit $p \geq 1, \frac{\sigma}{2} \geq 2$ gerade; nicht gleichzeitig $p = 1$ und $\frac{\sigma}{2} = 2$.

Die Klassen 2.1 und 2.2 umfassen bis auf den trivialen Knoten und die Kleeblattschlinge, die ein Torusknoten ist, alle Twistknoten; die Fälle $p = 1$ oder $\frac{\sigma}{2} = 2$ entsprechen Twistknoten. Zum Parameter $\frac{\sigma}{2} = 2p$ ergibt sich in der Klasse 2.1 ein amphicheiraler Knoten mit $\beta' = -\beta$ und in der Klasse 2.2 ein 2-Brückenknoten mit $\beta' = \beta$. Diese vier Klassen von 2-Brückenknoten lassen sich auch als Brezelknoten interpretieren.

Über die Anzahl der N -Äquivalenzklassen der Gruppendarstellungen läßt sich zeigen (vgl. Kapitel 2):

- Sei t_1 die Anzahl der Teiler von p einschließlich 1 und p selbst. Dann besitzt die Gruppe eines Knotens der Klasse 1.1 bzw. 1.2 mindestens $t_1 + 1$ nicht N -äquivalente Darstellungen mit zwei Erzeugenden und einer definierenden Relation.



- Sei t_1 wie oben und t_2 die Anzahl der Teiler von $l := \sigma/4$ einschließlich 1 und l . Dann besitzt die Gruppe eines Knotens der Klasse 2.1 bzw. 2.2, falls $p, l > 1$ und $p \neq l$ ist, mindestens $t_1 + t_2$, falls $p, l > 1$ und $p = l$ ist, mindestens t_1 und falls $p > 1$ und $l = 1$ oder $p = 1$ und $l > 1$ ist, mindestens $t_1 + 1$ bzw. $t_2 + 1$ nicht N -äquivalente Darstellungen mit zwei Erzeugenden und einer definierenden Relation.

Daraus folgt insbesondere für die Anzahl der N -Äquivalenzklassen der Darstellungen von 2-Brückenknotengruppen:

- Sei n eine beliebige natürliche Zahl und $|\beta| > 1$ ungerade. Dann gibt es unendlich viele 2-Brückenknoten $b(\alpha, \beta)$, deren Gruppe mindestens n nicht N -äquivalente Darstellungen mit zwei Erzeugenden und einer definierenden Relation besitzt.

Über die Anzahl der N -Äquivalenzklassen bei amphicheiralen 2-Brückenknoten bzw. Knoten mit nur einer Normalform folgt:

- Sei n eine beliebige natürliche Zahl. Dann gibt es unendlich viele amphicheirale 2-Brückenknoten und unendlich viele 2-Brückenknoten mit $\beta' = \beta$, deren Gruppe mindestens n nicht N -äquivalente Darstellungen mit zwei Erzeugenden und einer definierenden Relation besitzt.

Die meisten der gefundenen Gruppendarstellungen sind jedoch nicht geometrisch, vgl. Kapitel 3. Es zeigt sich:

- Der Außenraum eines Knotens der Klasse 1.1 bzw. 1.2 besitzt mindestens drei und der eines Knotens der Klasse 2.1 bzw. 2.2 in Abhängigkeit von p und σ mindestens zwei, drei oder vier nicht homöomorphe Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2.

Es ist nicht bekannt, ob die Gruppe eines 2-Brückenknotens unendlich viele nicht N -äquivalente Darstellungen mit zwei Erzeugenden und einer definierenden Relation besitzen kann, oder ob die gefundenen N -Äquivalenzklassen und Heegaard-Zerlegungen schon alle N -Äquivalenzklassen bzw. Heegaard-Zerlegungen darstellen.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt aufgebaut. In Kapitel 1 werden die grundlegenden Begriffe aufgeführt und die Ergebnisse aus [Fu] referiert. In Kapitel 2 werden die genannten vier Klassen von 2-Brückenknoten definiert. Gewisse Erzeugendenwechsel der Knotengruppen führen auf Gruppendarstellungen, die sich als nicht N -äquivalent erweisen. In Kapitel 3 wird untersucht, welche der in Kapitel 2 gefundenen Relatoren der Gruppendarstellungen sich nicht als einfach geschlossene Kurven auf einem Henkelkörper vom Geschlecht 2 realisieren lassen, also nicht von Heegaard-Zerlegungen stammen. In Kapitel 4 wird gezeigt, daß die übrigen in Kapitel 2 gefundenen Gruppendarstellungen geometrisch sind und es werden Heegaard-Zerlegungen angegeben, von denen die Gruppendarstellungen stammen. Kapitel 4 schließt mit einer detaillierten Zusammenfassung der Ergebnisse.

Herrn Prof. Dr. Heiner Zieschang möchte ich an dieser Stelle für die Einführung in die Thematik, sein Interesse an dieser Arbeit und anregende Gespräche danken.

1. Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2 eines Knotenaußenraumes

Eine *Heegaard-Zerlegung* (H_2, γ) vom Geschlecht 2 eines Knotenaußenraumes besteht aus einem Henkelkörper vom Geschlecht 2 und einem längs einer einfach geschlossenen Kurve γ auf die Oberfläche des Henkelkörpers geklebten 2-Henkel $D^2 \times I$, d.h. $(\partial D^2) \times I$ wird so auf die Oberfläche des Henkelkörpers geklebt, daß $(\partial D^2) \times \{\frac{1}{2}\}$ mit γ identifiziert wird.

Zwei Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2 eines Knotenaußenraumes heißen *homöomorph*, wenn sie „im wesentlichen gleich“ sind, d.h. wenn ein Homöomorphismus des Knotenaußenraums existiert, der den Henkelkörper der einen Zerlegung auf den Henkelkörper der anderen Zerlegung abbildet.

Jeder Heegaard-Zerlegung (H_2, γ) vom Geschlecht 2 läßt sich eine Darstellung $\langle x_1, x_2 \mid R \rangle$ der Fundamentalgruppe des Knotenaußenraumes zuordnen, wobei R die Ablesung der Kurve γ auf ∂H_2 bzgl. $\pi_1(H_2)$ ist; diese von einer Heegaard-Zerlegung stammende Gruppendarstellung heißt *geometrisch*.

Grundlegend für die Homöomorphieklassifikation der Heegaard-Zerlegungen ist die folgende Äquivalenzrelation, definiert auf der Menge der 1-Relatordarstellungen einer gegebenen Gruppe:

Definition

Zwei Gruppendarstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R(x_1, x_2) \rangle \cong \langle x_1, x_2 \mid S(x_1, x_2) \rangle$ heißen *N-äquivalent*, wenn es einen Automorphismus $\alpha \in \text{Aut}(\langle x_1, x_2 \rangle)$ gibt mit $\alpha(R) = S^{\pm 1}$.

Die Bedeutung dieses Begriffes für die Homöomorphieklassifikation von Heegaard-Zerlegungen zeigt das folgende Lemma, vgl. [BRZ]:

Lemma

Sei M ein Knotenaußenraum und (H_2, γ) , (H'_2, γ') seien zwei *homöomorphe* Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2 von M . Dann sind die zugehörigen 1-Relatordarstellungen $\langle x_1, x_2 | R \rangle$ und $\langle x_1, x_2 | S \rangle$ von $\pi_1(M)$, wobei R die Ablesung von γ und S die Ablesung von γ' ist, *N -äquivalent*.

Sind nicht von vornherein alle Heegaard-Zerlegungen eines Knotenaußenraumes M bekannt, eröffnet die Lösung der folgenden beiden Probleme einen Zugang zur Homöomorphieklassifikation der Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2:

(1) algebraisches Problem:

Bestimme die N -Äquivalenzklassen der Darstellungen von $\pi_1(M)$ mit zwei Erzeugenden und einer definierenden Relation.

(2) geometrisches Problem:

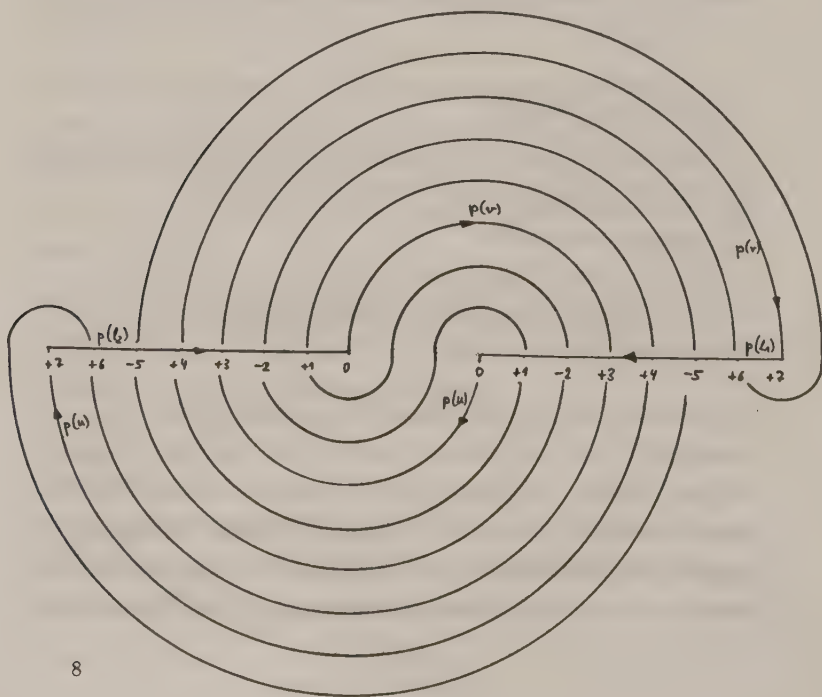
Bestimme die Gruppendarstellungen aus (1), die geometrisch sind, d.h. in der oben beschriebenen Weise von Heegaard-Zerlegungen von M stammen.

In (2) kann der Nachweis, daß eine gewisse Gruppendarstellung $\langle x_1, x_2 | R \rangle$ geometrisch ist, d.h. es sei nicht bekannt, ob sie von einer Heegaard-Zerlegung stammt, so geführt werden, daß die von einer geometrischen Gruppendarstellung $\langle x_1, x_2 | S \rangle$ mit bekannter Heegaard-Zerlegung zur fraglichen Gruppendarstellung $\langle x_1, x_2 | R \rangle$ führenden algebraischen Operationen an der bekannten Heegaard-Zerlegung geometrisch nachvollzogen

werden, vgl. Kapitel 4. Gleichzeitig erhält man so eine Heegaard-Zerlegung mit Gruppendarstellung $\langle x_1, x_2 \mid R \rangle$.

In dieser Arbeit werden die Außenräume gewisser 2-Brückenknoten betrachtet. Ein 2-Brückenknoten k besitzt eine Zerlegung in vier Bögen l_1, u, l_2, v und eine reguläre Projektion p auf eine Ebene, so daß gilt:

- (1) $k = l_1 u l_2 v$
- (2) $p(l_1), p(l_2), p(u), p(v)$ sind einfache Bögen
- (3) $p(l_1) \cap p(l_2) = p(u) \cap p(v) = \emptyset$
- (4) $p(u)$ und $p(v)$ schneiden $p(l_1)$ und $p(l_2)$ alternierend (und umgekehrt)
- (5) l_1 und l_2 besitzen bzgl. p nur Überkreuzungspunkte.



Umgekehrt ist ein Knoten mit diesen Eigenschaften ein 2-Brückenknoten. Werden den Anfangs-, End- und Doppelpunkten auf l_1 und l_2 in der der Orientierung von k entgegengesetzten Weise Restklassen $\bar{0}, \pm\bar{1}, \pm\bar{2}, \dots, \bar{\alpha} \in \mathbb{Z}_{2\alpha}$ so zugeordnet, daß einem Unterkreuzen von rechts nach links ein positives Vorzeichen entspricht, lautet die Hintereinanderablesung der auf $p(u)$ und $p(v)$ liegenden Anfangs-, Doppel- und Endpunkte $\bar{0}, \bar{\beta}, \overline{2\beta}, \dots, \overline{\alpha\beta}$ mit einem β aus $(-\alpha, \alpha)$, vgl. [Schu].

Die Zahlen α und $\beta \in (-\alpha, \alpha)$ sind ungerade und teilerfremd und jedes Paar (α, β) mit diesen Eigenschaften bestimmt eindeutig einen 2-Brückenknoten $b(\alpha, \beta)$ mit der obigen Bedeutung von α und β . Ein Paar (α, β) mit $\beta \in (-\alpha, \alpha)$, α und β ungerade und teilerfremd, heißt *Normalform*. Es gilt, vgl. [Schu]:

Satz (Schubert)

Zwei Normalformen (α, β) und (α', β') stellen genau dann denselben Knoten dar, wenn $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ oder $\beta\beta' \equiv 1 \pmod{2\alpha}$ ist.

Nach Spiegelung an einer Ebene erhält man aus der Normalform (α, β) die Normalform $(\alpha, -\beta)$, weil sich die Richtung des Unterkreuzens umkehrt. Deshalb gilt:

Korollar (Schubert)

Ein 2-Brückenknoten $b(\alpha, \beta)$ ist genau dann *amphicheiral*, wenn $-\beta^2 \equiv 1 \pmod{2\alpha}$ ist.

Einer Normalform (α, β) mit $\beta = \pm 1$ entspricht ein Torusknoten der Umlaufzahl 2 und Verschlingungszahl $\alpha\beta$, [Schu, S. 145]; im folgenden sei also stets $|\beta| > 1$.

Im nächsten Kapitel werden vier Klassen von 2-Brückenknoten definiert, deren Gruppendarstellungen gewisse Erzeugendenwechsel gestatten. Die Fundamentalgruppe des Außenraumes eines 2-Brückenknotens besitzt eine Darstellung der folgenden Form, siehe [Fu]:

Satz (Funcke)

Sei (α, β) eine Normalform und $b(\alpha, \beta)$ der zugehörige 2-Brückenknoten. Die Knotengruppe von $b(\alpha, \beta)$ besitzt eine Darstellung $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ mit

$$R_{(\alpha, \beta)} := \prod_{i=0}^{2\alpha-1} z_i^{\text{sign}_\alpha i\beta}$$

wobei

$$z_i = \begin{cases} x_1, & i \text{ gerade} \\ x_2, & i \text{ ungerade} \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned} \text{sign}_\alpha: \mathbb{Z}_{2\alpha} &\longrightarrow \{-1, 1\} \\ \bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{\alpha-1} &\longmapsto 1 \\ \bar{\alpha}, \dots, \overline{2\alpha-1} &\longmapsto -1. \end{aligned}$$

Ferner ist $R_{(\alpha, \beta)} \doteq R_{(\alpha, -\beta)}$; „ $\doteq$ “ bedeutet „zyklisch gleich“.

Der Relator $R_{(\alpha, \beta)}$ setzt sich aus zusammenhängenden Teilwörtern zusammen, in denen die Exponenten von x_1 und x_2 alle gleich 1 oder gleich -1 sind. Die Länge eines solchen zusammenhängenden Teilwortes beträgt l oder $l+1$ und l stammt aus der Division $\frac{\alpha-1}{|\beta|} = l + r$, $r \in [0, 1)$. Beispielsweise ist

$$R_{(7,3)} = x_1 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}.$$

Von Bedeutung für das „algebraische Problem“ im Rahmen der Homöomorphieklassifikation der Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2 ist ein Satz von Funcke über Darstellungen von 2-Brückenknotengruppen, die nicht N -äquivalent sind, siehe [Fu]:

Satz (Funcke)

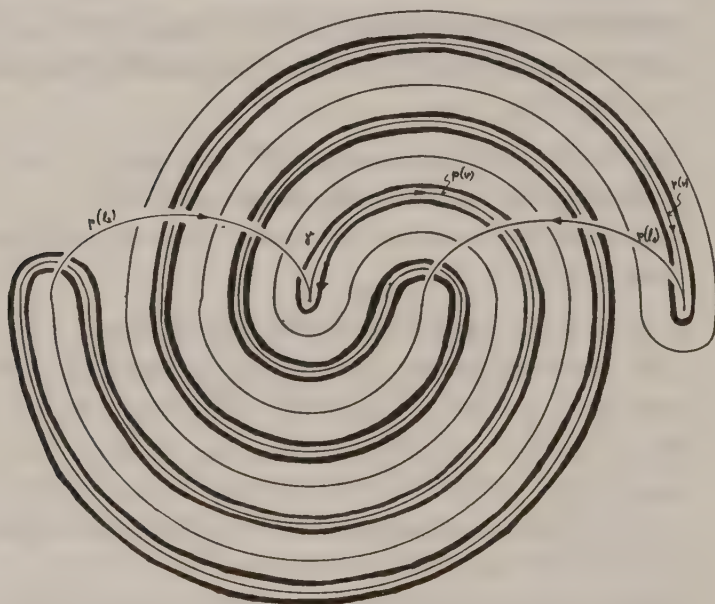
Die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ der Gruppe des 2-Brückenknotens $b(\alpha, \beta)$, d.h. $\beta\beta' \equiv 1 \pmod{2\alpha}$, sind nicht N -äquivalent, wenn $\beta' \neq \pm\beta$ ist.

Beispielsweise sind die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(7,5)} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(7,3)} \rangle$ nicht N -äquivalent. Über die Gruppen amphireichaler Knoten bzw. von Knoten die nur eine Normalform (α, β) besitzen, ist mit diesem Satz keine Aussage möglich.

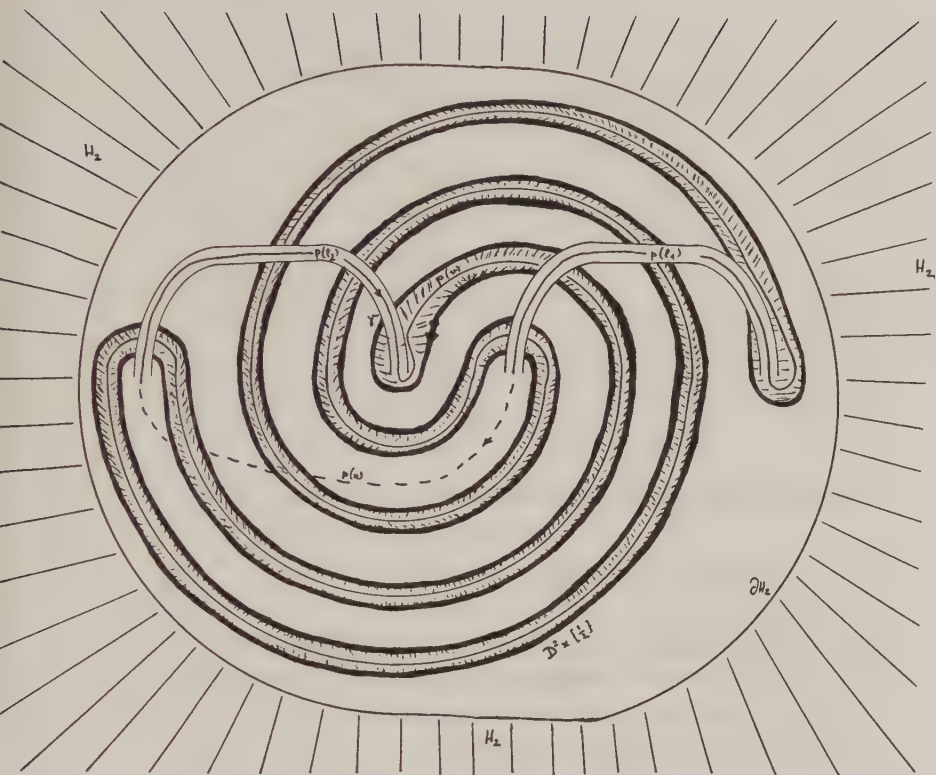
Ist also $\beta' \neq \pm\beta$, besitzt die Gruppe des 2-Brückenknotens $b(\alpha, \beta) = b(\alpha, \beta')$ mindestens zwei nicht N -äquivalente Darstellungen mit zwei Erzeugenden und einer definierenden Relation. Repräsentanten dieser Äquivalenzklassen sind die beiden Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$. Diese Darstellungen sind stets geometrisch, vgl. Abschnitt 4.1, so daß in diesen Fällen mindestens zwei nicht homöomorphe Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2 des Knotenaußenraumes existieren.

Zum Beispiel erhält man im Fall $(\alpha, \beta) = (7, 3)$ die folgende Heegaard-Zerlegung. Man kann annehmen, daß der Knoten $b(7, 3)$ (s.o.) mit Ausnahme der beiden „Brücken“ $p(l_1)$ und $p(l_2)$ auf einer Sphäre S^2 liegt, die ihrerseits in die S^3 eingebettet ist, die beiden Brücken des Knotens sollen im Äußeren der S^2 liegen. Bohrt man längs der beiden Brücken Löcher in die S^3 und entfernt das Innere der S^2 , entsteht im Äußeren der jetzt vierfach gelochten S^2 ein Henkelkörper H_2 vom Geschlecht 2. Nach einer kleinen

Deformation verläuft der Knoten im Inneren der vierfach gelochten S^2 und den ausgebohrten Löchern, d.h. im Außenraum des Henkelkörpers H_2 . Die einfach geschlossene Kurve γ der Heegaard-Zerlegung, längs der ein 2-Henkel $D^2 \times I$ auf die Oberfläche des Henkelkörpers geklebt wird, ergibt sich durch paralleles Entlanglaufen am Bogen $p(v)$ vom Endpunkt der Brücke $p(l_2)$ zum Anfangspunkt der Brücke $p(l_1)$ und zurück.

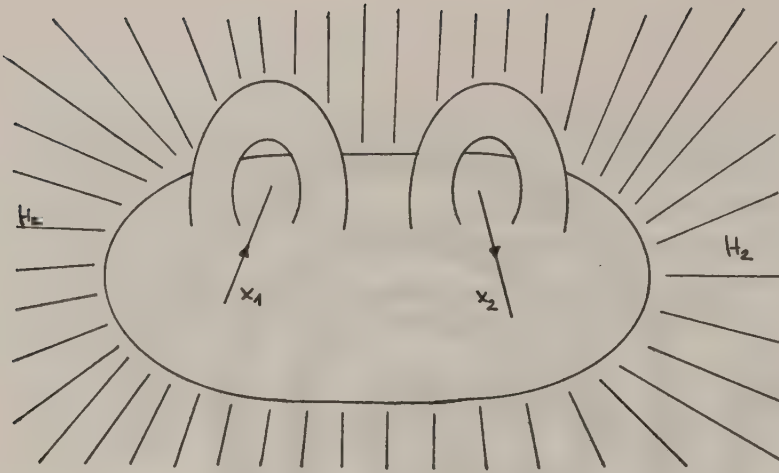


Die Heegaard-Zerlegung (H_2, γ) läßt sich jetzt so skizzieren (der 2-Henkel $D^2 \times I$ wird hier nur als $D^2 \times \{\frac{1}{2}\}$ angedeutet, $D^2 \times \{\frac{1}{2}\}$ wird beim Kleben mit γ identifiziert):



Die Brücken $p(l_1)$ und $p(l_2)$ des Knotens $l_1 u l_2 v$ verlaufen in den aus der S^2 ausgebohrten Löchern, der Bogen $p(v)$ liegt im Äußeren des Henkelkörpers H_2 innerhalb der durch den längs $p(v)$ eingeklebten 2-Henkel gebildeten „Rinne“ und der Bogen u verbindet im Äußeren des Henkelkörpers den Endpunkt der Brücke $p(l_1)$ mit dem Anfangspunkt der Brücke $p(l_2)$.

Mit der Orientierung



der beiden Henkel von H_2 besitzt die Kurve γ die Ablesung

$$x_1 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} = R_{(7,3)},$$

also ist die Darstellung $\langle x_1, x_2 \mid R_{(7,3)} \rangle$ geometrisch. Im allgemeinen Fall läßt sich eine Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht 2 des Außenraumes von $b(\alpha, \beta)$ mit zugehöriger Fundamentalgruppendarstellung $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ ganz analog konstruieren, siehe Abschnitt 4.1.

Gibt es also eine Zahl β' mit $\beta\beta' \equiv 1 \pmod{2\alpha}$ und $\beta' \neq \pm\beta$, besitzt der Außenraum des Knotens $b(\alpha, \beta) = b(\alpha, \beta')$ mindestens zwei nicht homöomorphe Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2.

Im nächsten Kapitel werden vier Klassen von 2-Brückenknoten definiert, deren Gruppendarstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ gewisse Erzeugendenwechsel erlauben, die zu nicht N -äquivalenten Darstellungen führen. In den darauf folgenden beiden Kapiteln wird dann untersucht, welche dieser Gruppendarstellungen geometrisch sind.

2. Vier Klassen von 2-Brückenknotten

Im Zusammenhang mit der Frage nach der Existenz weiterer N -Äquivalenzklassen stellt sich das Problem, wie man überhaupt weitere Darstellungen einer 2-Brückenknottengruppe $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ erhält. Die in [Fu] untersuchten Darstellungen $\langle x_2, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ der Gruppe eines 2-Brückenknottes ergeben sich aus dem geometrischen Sachverhalt, daß ein 2-Brückenknoten $b(\alpha, \beta)$ noch eine weitere Darstellung $b(\alpha, \beta')$ besitzt. Falls $\beta' \neq \pm\beta$ ist, sind die Gruppendarstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ nicht N -äquivalent.

In diesem Kapitel werden vier Klassen von 2-Brückenknotten angegeben, so daß $R_{(\alpha, \beta)}$ gewisse Erzeugendenwechsel der Art $y_2 = x_2^p$, $y_1 = x_1$ zuläßt, d.h. in den neuen Erzeugenden besitzt die Gruppe wieder eine 1-Relatordarstellung. Diese Erzeugendenwechsel sind keine Automorphismen der freien Gruppe $\langle x_1, x_2 \rangle$; durch freie Erzeugendenwechsel ergeben sich stets N -äquivalente 1-Relatordarstellungen, vgl. [MKS, Lemma 3.2].

Allgemein ist $R_{(\alpha, \beta)}$ von der Form $Kx_1K^{-1}x_2^{-1}$. Die vier Klassen enthalten 2-Brückenknotten $b(\alpha, \beta)$, so daß K im Fall der ersten beiden Klassen von der Form $K = K(x_1, (x_1x_2)^p)$ und im Fall der anderen beiden Klassen von der Form $K = K(x_1, (x_1x_2^{-1})^p)$ ist. Sei etwa $K = K(x_1, (x_1x_2)^p)$. Dann ist

$$R_{(\alpha, \beta)} \doteq K(x_1, (x_1x_2)^p)x_1K^{-1}(x_1, (x_1x_2)^p)x_2^{-1}.$$

Ein erster Erzeugendenwechsel $y_2 = x_1x_2$, $y_1 = x_1$ überführt die Darstellung $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ in

$$\langle y_1, y_2 \mid K(y_1, y_2^p)y_1K^{-1}(y_1, y_2^p)y_2^{-1}y_1 \rangle.$$

Sei j ein Teiler von p . Dann ergibt sich nach dem Erzeugendenwechsel $z_2 = y_2^j$ mit $j \cdot q = p$ daraus die Darstellung

$$\langle y_1, z_2 \mid z_2^{-1} \left(y_1 K(y_1, z_2^q) y_1 K^{-1}(y_1, z_2^q) \right)^j \rangle,$$

da y_2 in dem Relator nur mit dem Exponenten $\pm p$ und einmal mit dem Exponenten -1 auftritt und deshalb y_1, z_2 Erzeugende sind.

Ist also $b(\alpha, \beta)$ ein 2-Brückenknoten, so daß K von der Form

$K = K(x_1, (x_1 x_2^p))$ ist, so gibt es zu jedem Teiler j von p eine Darstellung $\langle x_1, x_2 \mid x_2^{-1} (x_1 K(x_1, x_2^q) x_1 K^{-1}(x_1, x_2^q))^j \rangle$ der Gruppe $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$, wobei $jq = p$. Eine ähnliche Rechnung läßt sich auch im anderen Fall mit $K = K(x_1, (x_1 x_2^{-1})^p)$ durchführen. Die Relatoren der Knoten der vier Klassen besitzen ein Teilwort K der beschriebenen Form.

Die vier Klassen enthalten bis auf den trivialen Knoten und die Kleeblattschlinge alle Twistknoten, Knoten $b(\alpha, \beta)$ mit $\beta' = \beta$ und amphicheirale Knoten $b(\alpha, \beta)$ mit $\beta' = -\beta$. Über Knoten $b(\alpha, \beta) = b(\alpha, \beta')$ mit $\beta' = \pm\beta$ war mit dem geometrischen Ansatz aus [Fu] keine Aussage über N -Äquivalenzklassen möglich.

2.1 Die Klasse 1.1

Bemerkung

Sei $p > 1$, $\frac{\sigma}{2} \in \mathbb{Z}$ ungerade und $|\sigma| > 2$. Dann ist

$$(\alpha, \beta) = \left(p|\sigma| - 1, \frac{\sigma}{2} \right)$$

eine Normalform, d.h. α und β sind ungerade, teilerfremd und $-\alpha < \beta < \alpha$. Die andere Normalform (α, β') mit $b(\alpha, \beta) = b(\alpha, \beta')$ ist gegeben durch

$$\beta' = \begin{cases} -\alpha + 2p, & \frac{\sigma}{2} > 0 \\ \alpha - 2p, & \frac{\sigma}{2} < 0. \end{cases}$$

Beweis

Offenbar ist (α, β) eine Normalform; eine Rechnung zeigt, daß für $\beta > 0$ $\beta\beta' = 1 + 2\alpha(-\frac{\beta-1}{2})$ und für $\beta < 0$ $\beta\beta' = 1 + 2\alpha(\frac{\beta+1}{2})$ gilt mit dem angegebenen β' . □

Definition

Die Klasse 1.1 sei die Menge aller 2-Brückenknöten $b(\alpha, \beta)$ mit einer Normalform

$$(\alpha, \beta) = (p|\sigma| - 1, \frac{\sigma}{2})$$

wobei $p > 1$, $\frac{\sigma}{2} \in \mathbb{Z}$ ungerade und $|\sigma| > 2$ ist.

2.1.1 Gruppendarstellungen der Knöten der Klasse 1.1

Lemma 1

Sei $b(\alpha, \beta) = b(\alpha, \beta')$ ein Knöten der Klasse 1.1, d.h. es ist $(\alpha, \beta) = (p|\sigma| - 1, \frac{\sigma}{2})$, $\beta' = \begin{cases} -\alpha + 2p, & \frac{\sigma}{2} > 0 \\ \alpha - 2p, & \frac{\sigma}{2} < 0 \end{cases}$ wobei $p > 1$, $\frac{\sigma}{2} \in \mathbb{Z}$ ungerade und $|\sigma| > 2$. Dann ist

$$\begin{aligned} R_{(\alpha, \beta)} &\doteq \left((x_1 x_2)^p x_1^{-1} (x_1 x_2)^{-p} x_1 \right)^{\frac{|\beta|-1}{2}} (x_1 x_2)^p x_2^{-1} \\ &\quad \cdot \left((x_1 x_2)^{-p} x_1^{-1} (x_1 x_2)^p x_1 \right)^{\frac{|\beta|-1}{2}} (x_1 x_2)^{-p} x_1 \end{aligned}$$

und

$$R_{(\alpha, \beta')} \doteq (x_2 x_1^{-1})^{\frac{|\beta|-1}{2}} x_1 \left(x_1^{-1} x_2^{-1} (x_1 x_2^{-1})^{\frac{|\beta|-1}{2}} x_1^{-1} (x_2 x_1^{-1})^{\frac{|\beta|-1}{2}} x_1 \right)^p x_1 \\ \cdot \left((x_2^{-1} x_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} x_2 (x_1^{-1} x_2)^{\frac{|\beta|-1}{2}} x_1 \right)^{p-1} x_1^{-1} (x_1 x_2^{-1})^{\frac{|\beta|-1}{2}} x_1.$$

Beweis

Nach [Fu] ist

$$R_{(\alpha, \beta)} = \prod_{i=0}^{2\alpha-1} z_i^{\text{sign}_\alpha \overline{i\beta}}$$

wobei

$$z_i = \begin{cases} x_1, & i \text{ gerade} \\ x_2, & i \text{ ungerade} \end{cases}$$

und

$$\text{sign}_\alpha: \mathbb{Z}_{2\alpha} \longrightarrow \{-1, 1\}$$

$$\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{\alpha-1} \longmapsto 1$$

$$\overline{\alpha}, \overline{\alpha+1}, \dots, \overline{2\alpha-1} \longmapsto -1.$$

In der folgenden Tabelle stehen die Zahlen übereinander, die Repräsentanten derselben Klasse von $\mathbb{Z}_{2\alpha}$ sind:

$$\frac{|\beta|+1}{2} \text{ Zeilen } \left\{ \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 2 & \dots & \alpha-1 & \alpha & \alpha+1 & \dots & 2\alpha-1 \\ 2\alpha & & & & 3\alpha-1 & 3\alpha & & & 4\alpha-1 \\ \vdots & & & & & & & & \\ (|\beta|-1)\alpha & & & & |\beta|\alpha-1 & |\beta|\alpha & & & (|\beta|-1)\alpha-1 \end{array} \right.$$

$\swarrow$
 sign_α
 $\text{Exponent} + 1$

$\searrow$
 sign_α
 $\text{Exponent} - 1$

Der Relator $R_{(\alpha, \beta)}$ besteht aus zusammenhängenden Teilwörtern, in dem die abwechselnd aufeinanderfolgenden Erzeugenden x_1 bzw. x_2 den gleichen Exponenten $+1$ oder -1 besitzen. Die Exponenten sind $+1$, solange

die Folge $(i\beta)_{i=0}^{2\alpha-1}$ in den linken Bereich der Tabelle trifft und -1 , solange sie in den rechten Bereich der Tabelle trifft; ohne Einschränkung sei hier $\beta > 0$ vorausgesetzt, da $R_{(\alpha,\beta)} \doteq R_{(\alpha,-\beta)}$.

Der Relator $R_{(\alpha,\beta)}$ ist also festgelegt, wenn man die Folge der Längen der zusammenhängenden Teilwörter gleicher Exponenten vorgibt. Es genügt sogar, die erste Hälfte einer Folge anzugeben, denn $\alpha\beta$ ist das erste Folgenglied in der zweiten Hälfte der Folge $(i\beta)_{i=0}^{2\alpha-1}$ und gleichzeitig steht $\alpha\beta$ ganz links in der rechten Hälfte der Tabelle, deshalb ist $\text{sign}_\alpha \overline{i\beta} = -\text{sign}_\alpha \overline{(i-\alpha)\beta}$ für $i \geq 0$. Die Folge der Längen zusammenhängender Teilwörter wiederholt sich also in ihrer zweiten Hälfte, die entsprechenden Vorzeichen der Exponenten sind genau invers zu denen der ersten Hälfte; es genügt daher, die erste Hälfte dieser Folge anzugeben.

Die Anzahl der Glieder der Folge $(i\beta)_{i=0}^{2\alpha-1}$ aus $\{0, 1, \dots, \alpha-1\}$ ist gleich $\alpha_1 + 1$, wobei $\frac{\alpha-1}{\beta} = \alpha_1 + \varepsilon_1$ und $\varepsilon_1 \in [0, 1)$. Dann ist $l_1 := \alpha_1 + 1$ die Länge des ersten zusammenhängenden Teilwortes von $R_{(\alpha,\beta)}$, die Exponenten von x_1 bzw. x_2 sind $+1$.

Sei α_2 gegeben durch $\frac{2\alpha-1}{\beta} = \alpha_2 + \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 \in [0, 1)$ so ist die Länge des zweiten zusammenhängenden Teilwortes $l_2 = \alpha_2 - \alpha_1$. Allgemeiner gilt:

Die Anzahl der Glieder der Folge $(i\beta)_{i=0}^{2\alpha-1}$, die Elemente von $\{0, 1, \dots, k\alpha-1\}$, sind, ist $\alpha_k + 1$, wobei α_k gegeben ist durch $\frac{k\alpha-1}{\beta} = \alpha_k + \varepsilon_k$, $\varepsilon_k \in [0, 1)$. Die Länge des zusammenhängenden Teilwortes Nr. k ist $l_k = \alpha_k - \alpha_{k-1}$, $l_1 = \alpha_1 + 1$. Zum Beweis von Lemma 1 ist jeweils die Folge (l_k) zu berechnen.

Behauptung 1: Sei $\frac{\alpha}{2} \geq 3$ ungerade und $p > 1$. Dann gehört zu $(\alpha, \beta) = (p\sigma - 1, \frac{\sigma}{2})$ die Längenfolge

$$\underbrace{2p \ 2p \ \dots \ 2p}_{\beta-1} \ 2p-1 \ \underbrace{2p \ 2p \ \dots \ 2p}_{\beta-1} \ 2p-1$$

Beweis: Für $1 \leq k \leq \beta - 1$ gilt:

$$\frac{k\alpha - 1}{\beta} = 2pk - 1 + \frac{\beta - k - 1}{\beta}$$

also ist $\alpha_k = 2pk - 1$ für $1 \leq k \leq \beta - 1$ und deshalb $l_k = 2p$ für $1 \leq k \leq \beta - 1$. Weiterhin ist

$$\frac{\beta\alpha - 1}{\beta} = 2p\beta - 2 + \frac{\beta - 1}{\beta}$$

daraus folgt $l_\beta = \alpha_\beta - \alpha_{\beta-1} = 2p - 1$.

□

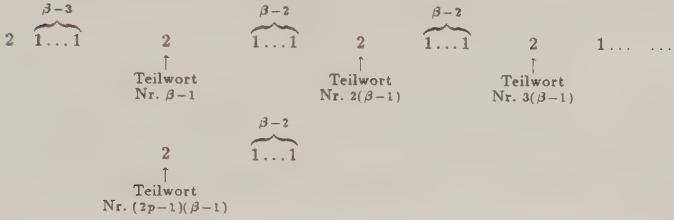
Aus Behauptung 1 folgt mit den eben durchgeführten Überlegungen:

$$R_{(\alpha, \beta)} = \left((x_1 x_2)^p (x_1^{-1} x_2^{-1})^p \right)^{\frac{\beta-1}{2}} \\ (x_1 x_2)^p x_2^{-1} \left((x_2^{-1} x_1^{-1})^p (x_2 x_1)^p \right)^{\frac{\beta-1}{2}} (x_2^{-1} x_1^{-1})^p x_1$$

in Übereinstimmung mit dem oben angegebenen Relator.

Der Relator $R_{(\alpha, \beta')}$ läßt sich ähnlich bestimmen. Für $\beta > 0$ ist $\beta' = -\alpha + 2p$ und für $\beta < 0$ ist $\beta' = \alpha - 2p$; es genügt also wieder, $\beta' > 0$ zu betrachten.

Behauptung 2: Sei $\beta = \frac{\sigma}{2} \geq 3$ und $p > 1$. Dann ist die erste Hälfte der Längenfolge zu $(\alpha, \beta') = (p\sigma - 1, p\sigma - 1 - 2p)$:



Beweis: Zunächst ist $l_1 = 2$, denn

$$\frac{\alpha - 1}{\beta'} = 1 + \frac{2p - 1}{\beta'} \text{ und } 0 < \frac{2p - 1}{\beta'} < 1.$$

Für $2 \leq k < \beta - 1$ ist

$$\frac{k\alpha - 1}{\beta'} = k + \frac{k2p - 1}{\beta'} \text{ und } \frac{k2p - 1}{\beta'} < 1,$$

folglich ist $\alpha_k = k$ für $2 \leq k < \beta - 1$. Weiter gilt

$$\frac{(\beta - 1)\alpha - 1}{\beta'} = \beta$$

also ist $\alpha_{\beta-1} = \beta$. Insgesamt ist jetzt

$$l_1 = 2$$

$$l_k = 1 \text{ für } 2 \leq k < \beta - 1$$

$$l_{\beta-1} = 2.$$

Allgemein ist

$$\frac{k\alpha - 1}{\beta'} = k + \frac{k2p - 1}{\beta'}.$$

Zur Berechnung der übrigen α_k ist der Term

$$\frac{k2p-1}{\beta'}$$

abzuschätzen, dazu wird die Zahl k in der Form

$$k = j(\beta - 1) + m$$

geschrieben, wobei $2 \leq j \leq 2p-1$ und $0 \leq m \leq \beta-2$ ist; man beachte, daß im vorliegenden Fall $2p-1 \geq 3$ und $\beta \geq 3$ sind. Aus $2 \leq j \leq 2p-1$ folgt

$$\frac{2}{2p} \leq \frac{2p+1-j}{2p} \leq \frac{2p-1}{2p}$$

also

$$0 < \frac{2p+1-j}{2p} < 1, \quad (*)$$

sowie

$$\frac{1}{2p} \leq \frac{2p-j}{2p} \leq \frac{2p-2}{2p}$$

und damit

$$0 < \frac{2p-j}{2p} < 1. \quad (**)$$

Für die Zahl k gilt die Abschätzung

$$j(\beta-1) \leq k \leq (j+1)(\beta-1)-1,$$

denn $k = j(\beta-1) + m$ und $0 \leq m \leq \beta-2$. Aus dieser Abschätzung folgen wegen (*) und (**) die Ungleichungen

$$j(\beta-1)-1 + \frac{2p+1-j}{2p} < k < (j+1)(\beta-1)-1 + \frac{2p-j}{2p}.$$

Mit der Identität

$$\frac{n\beta'+1}{2p} = n(\beta-1)-1 + \frac{2p+1-n}{2p}$$

folgt

$$\frac{j\beta' + 1}{2p} < k < \frac{(j+1)\beta' + 1}{2p}$$

und diese Ungleichungen sind äquivalent zu

$$j < \frac{k2p - 1}{\beta'} < j + 1.$$

Insgesamt ist für $k = j(\beta - 1) + m$, $2 \leq j \leq 2p - 1$ und $0 \leq m \leq \beta - 2$

$$\alpha_k = k + j = j\beta + m.$$

Wie behauptet ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} l_{j(\beta-1)} &= 2 \\ l_{j(\beta-1)+m} &= 1 \quad \text{für } 2 \leq j \leq 2p - 1, \quad 0 < m \leq \beta - 2. \end{aligned}$$

□

Aus der Folge der Längen läßt sich jetzt der Relator $R_{(\alpha, \beta')}$ bestimmen:

$$\begin{aligned} R_{(\alpha, \beta')} &= x_1 x_2 (x_1^{-1} x_2)^{\frac{|\beta|-3}{2}} \left(x_1^{-1} x_2^{-1} (x_1 x_2^{-1})^{\frac{|\beta|-3}{2}} \right. \\ &\quad \cdot x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} (x_2 x_1^{-1})^{\frac{|\beta|-3}{2}} x_2 \Big)^{p-1} \\ &\quad \cdot x_1^{-1} x_2^{-1} (x_1 x_2^{-1})^{\frac{|\beta|-3}{2}} x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} (x_2 x_1^{-1})^{\frac{|\beta|-3}{2}} \\ &\quad \left(x_2 x_1 (x_2^{-1} x_1)^{\frac{|\beta|-3}{2}} x_2^{-1} x_1 x_2 (x_1^{-1} x_2)^{\frac{|\beta|-3}{2}} x_1^{-1} \right)^{p-1} \\ &\quad \cdot x_2 x_1 (x_2^{-1} x_1)^{\frac{|\beta|-3}{2}} x_2^{-1}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck läßt sich nach kurzer Rechnung auf die behauptete Form bringen; damit ist Lemma 1 bewiesen.

□

Die Relatoren $R_{(\alpha, \beta)}$ aus Lemma 1 lassen Erzeugendenwechsel der oben beschriebenen Art zu:

Lemma 2

Sei $\frac{\sigma}{2} \in \mathbb{Z}$ ungerade, $|\sigma| > 2$ und $p > 1$. Seien j und q positive Zahlen mit $jq = p$. Dann besitzt die Gruppe $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ mit $(\alpha, \beta) = (p|\sigma| - 1, \frac{\sigma}{2})$ eine Darstellung $\langle x_1, x_2 \mid K_{j,q}^{1,1} \rangle$ mit

$$K_{j,q}^{1,1} := x_2^{-1} \left(x_1 (x_2^{-q} x_1^{-1} x_2^q x_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} x_2^{-q} x_1 (x_2^q x_1^{-1} x_2^{-q} x_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} x_2^q \right)^j$$

Beweis

Der erste Erzeugendenwechsel $y_2 = x_1 x_2$, $y_1 = x_1$ führt zu einer Darstellung

$$\langle y_1, y_2 \mid (y_2^p y_1^{-1} y_2^{-p} y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} y_2^{p-1} y_1 (y_2^{-p} y_1^{-1} y_2^p y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} y_2^{-p} y_1 \rangle.$$

Der zweite Erzeugendenwechsel $z_2 = y_2^j$ überführt die vorige Darstellung in

$$\begin{aligned} & \langle y_1, y_2, z_2 \mid y_2 = y_1 (y_2^{-p} y_1^{-1} y_2^p y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} y_2^{-p} \\ & \quad \cdot y_1 (y_2^p y_1^{-1} y_2^{-p} y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} y_2^p, z_2 = y_2^j \rangle \\ & \cong \langle y_1, z_2 \mid z_2^{-1} \left(y_1 (z_2^{-q} y_1^{-1} z_2^q y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} z_2^{-q} \right. \\ & \quad \cdot y_1 (z_2^q y_1^{-1} z_2^{-q} y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} z_2^q \left. \right)^j \rangle. \end{aligned}$$

Schreibt man statt z_2 wieder x_2 und statt y_1 x_1 , ergibt sich die Behauptung. □

Im nächsten Abschnitt werden die Gruppendarstellungen aus Lemma 2 in N -Äquivalenzklassen eingeteilt.

2.1.2 N -Äquivalenzklassen der Gruppendarstellungen

Zwei Gruppendarstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R \rangle \cong \langle x_1, x_2 \mid S \rangle$ heißen N -äquivalent, wenn ein Automorphismus $\alpha \in \text{Aut}(\langle x_1, x_2 \mid \rangle)$ existiert mit $\alpha(R) = S^{\pm 1}$. Besitzen zwei Wörter $R, S \in \langle x_1, x_2 \mid \rangle$ verschiedene minimale Länge bzgl. (Whitehead-) Automorphismen, so existiert kein Automorphismus von $\langle x_1, x_2, \mid \rangle$, der sie aufeinander abbildet, siehe [LS, p. 35]. Es gilt:

Lemma

Die zyklische Länge eines Wortes $W \in \langle x_1, x_2 \mid \rangle$ ändert sich höchstens unter Abbildung mit den folgenden (Whitehead-) Automorphismen:

$$\varphi_\varepsilon: \begin{cases} x_1 \rightarrow x_1 x_2^\varepsilon \\ x_2 \rightarrow x_2 \end{cases} \quad \psi_\delta: \begin{cases} x_1 \rightarrow x_1 \\ x_2 \rightarrow x_2 x_1^\delta \end{cases}$$

wobei $\varepsilon, \delta \in \{-1, 1\}$. Alle anderen Whitehead-Automorphismen ändern die zyklische Länge nicht.

Beispielsweise hat $R_{(7,3)}$ minimale zyklische Länge 13 und $R_{(7,5)}$ minimale zyklische Länge 11, deshalb sind die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(7,3)} \rangle$ mit $\langle x_1, x_2 \mid R_{(7,5)} \rangle$ nicht N -äquivalent; siehe [Fu].

$z(w)$ bezeichne die minimale zyklische Länge eines Wortes $w \in \langle x_1, x_2 \mid \rangle$ und $l(w)$ dessen zyklische Länge.

Die Relatoren aus Lemma 1 und Lemma 2 besitzen folgende minimale zyklische Länge:

Lemma 3

Mit den Bezeichnungen aus Lemma 1 und 2 gilt:

$$(1) \quad z(K_{j,q}^{1,1}) = \begin{cases} 8j\mu + 4j - 3, & q = 1 \\ |\beta|(2p + 2j) - 1, & q \geq 2 \end{cases}$$

$$\mu := \frac{|\beta| - 1}{2}$$

$$(2) \quad z(R_{(\alpha,\beta)}) = |\beta|(2p + 2) - 1$$

$$z(R_{(\alpha,\beta')}) = |\beta|2p + 4p - 1$$

Beweis

Die Aussage (2) folgt aus [Fu]. Die Berechnung der minimalen zyklischen Länge von

$$K_{j,q}^{1,1} = x_2^{-1} \left(x_1 (x_2^{-q} x_1^{-1} x_2^q x_1)^\mu x_2^{-q} x_1 (x_2^q x_1^{-1} x_2^{-1} x_1)^\mu x_2^q \right)^j$$

geschieht in mehreren Schritten unter Anwendung des eben angegebenen Lemmas.

1. Schritt: Durch Abzählen folgt:

$$l(K_{j,q}^{1,1}) = 4\mu jq + 4j\mu + 2jq + 2j - 1$$

2. Schritt: Im 2. Schritt wird die zyklische Länge von $\varphi_\epsilon(K_{j,q}^{1,1})$ bzw. $\psi_\delta(K_{j,q}^{1,1})$ bestimmt und mit $l(K_{j,q}^{1,1})$ verglichen:

$$\begin{aligned} \varphi_\epsilon(K_{j,q}^{1,1}) &= x_2^{-1} \left(x_1 x_2^\epsilon (x_2^{-q-\epsilon} x_1^{-1} x_2^q x_1 x_2^\epsilon)^\mu x_2^{-q} x_1 \right. \\ &\quad \left. x_2^\epsilon (x_2^{q-\epsilon} x_1^{-1} x_2^{-q} x_1 x_2^\epsilon)^\mu x_2^q \right)^j \\ &= x_2^{-1} \left(x_1 (x_2^{-q} x_1^{-1} x_2^q x_1)^\mu x_2^{\epsilon-q} x_1 (x_2^q x_1^{-1} x_2^{-q} x_1)^\mu x_2^{q+\epsilon} \right)^j. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$l(\varphi_\varepsilon(K_{j,q}^{1,1})) = \begin{cases} 8j\mu + 4j - \varepsilon, & q = 1 \\ 4\mu jq + 4j\mu + 2jq + 2j - 1, & q \geq 2 \end{cases}$$

Ein Vergleich ergibt: $l(\varphi_\varepsilon(K_{j,q}^{1,1})) \geq l(K_{j,q}^{1,1})$. Weiter ist

$$\begin{aligned} \psi_\delta(K_{j,q}^{1,1}) &= x_1^{-\delta} x_2^{-1} \left(x_1 ((x_1^{-\delta} x_2^{-1})^q x_1^{-1} (x_2 x_1^\delta)^q x_1)^\mu (x_1^{-\delta} x_2^{-1})^q x_1 \right. \\ &\quad \left. \cdot ((x_2 x_1^\delta)^q x_1^{-1} (x_1^{-\delta} x_2^{-1})^q x_1)^\mu (x_2 x_1^\delta)^q \right)^j \end{aligned}$$

Im Fall $\delta = 1$ ist

$$\begin{aligned} \psi_1(K_{j,q}^{1,1}) &\doteq \left((x_2^{-1} (x_1^{-1} x_2^{-1})^{q-1} x_1^{-1} (x_2 x_1)^q)^\mu x_2^{-1} (x_1^{-1} x_2^{-1})^{q-1} x_1 \right. \\ &\quad \left. \cdot ((x_2 x_1)^{q-1} x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} (x_1^{-1} x_2^{-1})^{q-1} x_1)^\mu (x_2 x_1)^q \right)^j x_1^{-1} x_2^{-1} \end{aligned}$$

also $l(\psi_1(K_{j,q}^{1,1})) = 8\mu jq + 4jq - 2$.

Für $\delta = -1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \psi_{-1}(K_{j,q}^{1,1}) &\doteq \left(((x_1 x_2^{-1})^q x_1^{-1} (x_2 x_1^{-1})^{q-1} x_2)^\mu (x_1 x_2^{-1})^q x_1 \right. \\ &\quad \left. \cdot ((x_2 x_1^{-1})^q x_2^{-1} (x_1 x_2^{-1})^{q-1} x_1)^\mu (x_2 x_1^{-1})^{q-1} x_2 \right)^j x_2^{-1} x_1 \end{aligned}$$

daraus folgt

$$l(\psi_1(K_{j,q}^{1,1})) = \begin{cases} 8j\mu + 4j, & g = 1 \\ 8\mu jq + 4jq - 2, & q \geq 2 \end{cases}$$

Nur im Fall $\delta = 1$ und $q = 1$ verringert sich die zyklische Länge:

$$l(\psi_\delta(K_{j,q}^{1,1})) < l(K_{j,q}^{1,1}) \iff \delta = 1 \wedge g = 1.$$

3. Schritt: Der 2. Schritt hat gezeigt, daß für $q \geq 2$ $l(K_{j,q}^{1,1})$ schon die minimale zyklische Länge ist. Im 3. Schritt werden $l(\varphi_\varepsilon(\psi_1(K_{j,1}^{1,1})))$ und $l(\psi_\delta(\psi_1(K_{j,1}^{1,1})))$ berechnet. Anwendung von φ_ε auf

$$\psi_1(K_{j,1}^{1,1}) \doteq \left((x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1)^\mu x_2^{-1} x_1 (x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_1)^\mu x_2 x_1 \right)^j x_1^{-1} x_2^{-1}$$

liefert

$$\varphi_\varepsilon \psi_1(K_{j,1}^{1,1}) \doteq \left((x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1)^\mu x_2^{\varepsilon-1} x_1 (x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_1)^\mu x_2^{\varepsilon+1} x_1 \right)^j x_1^{-1} x_2^{-\varepsilon-1}$$

und

$$l(\varphi_\varepsilon \psi_1(K_{j,1}^{1,1})) = \begin{cases} 8j\mu + 4j - 3, & \varepsilon = 1 \\ 8j\mu + 4j - 1, & \varepsilon = -1 \end{cases}$$

und weiterhin ist

$$\psi_\delta(\psi_1(K_{j,1}^{1,1})) \doteq \left((x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1)^\mu x_2^{-1} x_1 (x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_1)^\mu x_2 x_1 \right)^j x_1^{-1} x_2^{-1} x_1^{-\delta}$$

mit zyklischer Länge

$$l(\psi_\delta(\psi_1(K_{j,1}^{1,1}))) = \begin{cases} 8j\mu + 4j - 3, & \delta = 1 \\ 8j\mu + 4j - 1, & \delta = -1 \end{cases}$$

Nach der Rechnung im 2. Schritt ist

$$l(\psi_1(K_{j,1}^{1,1})) = 8j\mu + 4j - 2,$$

deshalb ist

$$l(\varphi_\varepsilon \psi_1(K_{j,1}^{1,1})) < l(\psi_1(K_{j,1}^{1,1})) \iff \varepsilon = 1$$

und

$$l(\psi_\delta \psi_1(K_{j,1}^{1,1})) < l(\psi_1(K_{j,1}^{1,1})) \iff \delta = 1;$$

weil $l(\varphi_1 \psi_1(K_{j,1}^{1,1})) = l(\psi_1 \psi_1(K_{j,1}^{1,1})) = 8j\mu + 4j - 3$ ist, genügt es zu untersuchen, ob sich $\psi_1 \psi_1(K_{j,1}^{1,1})$ noch unter φ_ε oder ψ_δ verringern läßt.

4. Schritt: In diesem Schritt wird $l(\varphi_\varepsilon \psi_1 \psi_1(K_{j,1}^{1,1}))$ und $l(\psi_\delta \psi_1 \psi_1(K_{j,1}^{1,1}))$ berechnet.

$$\psi_1 \psi_1(K_{j,1}^{1,1}) \doteq \left((x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1)^\mu x_2^{-1} x_1 (x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_1)^\mu x_2 x_1 \right)^j x_1^{-1} x_2^{-1} x_1^{-1}.$$

Daraus folgt

$$\varphi_\varepsilon \psi_1 \psi_1(K_{j,1}^{1,1}) \doteq \left((x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1)^\mu x_2^{\varepsilon-1} x_1 (x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_1)^\mu x_2^{\varepsilon+1} x_1 \right)^j x_1^{-1} x_2^{-1-\varepsilon} x_1^{-1} x_2^{-\varepsilon}$$

und

$$l(\varphi_\varepsilon \psi_1 \psi_1(K_{j,1}^{1,1})) = 8j\mu + 4j - 3 = l(\psi_1 \psi_1(K_{j,1}^{1,1})).$$

φ_ε verkleinert die zyklische Länge von $\psi_1 \psi_1(K_{j,1}^{1,1})$ nicht. Für ψ_δ gilt:

$$\psi_\delta \psi_1 \psi_1(K_{j,1}^{1,1}) \doteq \left((x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1)^\mu x_2^{-1} x_1 (x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_1)^\mu x_2 x_1 \right)^j x_1^{-1} x_2^{-1} x_1^{-1-\delta}$$

und

$$l(\psi_\delta \psi_1 \psi_1(K_{j,1}^{1,1})) = 8j\mu + 4j - 2 > l(\psi_1 \psi_1(K_{j,1}^{1,1})).$$

Insgesamt ist

$$z(K_{j,q}^{1,1}) = \begin{cases} l(\varphi_1 \psi_1(K_{j,1}^{1,1})) = l(\psi_1 \psi_1(K_{j,1}^{1,1})), & q = 1 \\ l(K_{j,q}^{1,1}), & q \geq 2. \end{cases}$$

Das war zu zeigen. □

Ein Vergleich der im vorigen Lemma berechneten minimalen zyklischen Längen der Relatoren ergibt:

Bemerkung

Sei $\frac{\sigma}{2} \in \mathbb{Z}$ ungerade, $|\sigma| > 2$ und $p > 1$. Seien j_1, q_1, j_2, q_2 positive Zahlen mit $j_1 q_1 = p = j_2 q_2$. Dann ist

- (i) $z(K_{j_1, q_1}^{1,1}) = z(K_{j_2, q_2}^{1,1}) \iff j_1 = j_2$
- (ii) $z(K_{j_1, q_1}^{1,1}) \neq z(R_{(\alpha, \beta')})$.

Daraus folgt die Einteilung der Gruppendarstellungen aus Lemma 1 und Lemma 2 in N -Äquivalenzklassen:

Satz 1

Sei $\frac{\sigma}{2} \in \mathbb{Z}$ ungerade, $|\sigma| > 2$ und $p > 1$. Sei t die Anzahl der Teiler von p einschließlich 1 und p selbst. Dann besitzt die Gruppe $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ eines Knotens $b(\alpha, \beta)$ der Klasse 1.1 mit $(\alpha, \beta) = (p|\sigma| - 1, \frac{\sigma}{2})$ mindestens $t + 1 \geq 3$ nicht N -äquivalente Darstellungen mit zwei Erzeugenden und einer definierenden Relation.

Beweis

Zu den verschiedenen Teilern j von p bekommt man Relatoren, die zu nicht N -äquivalenten Gruppendarstellungen gehören, denn $z(K_{j_1, q_1}^{1,1}) \neq z(K_{j_2, q_2}^{1,1})$ falls $j_1 \neq j_2$ ist. Die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid K_{1, p}^{1,1} \rangle$ sind N -äquivalent, vgl. Lemma 2. Ferner ist $z(K_{j, q}^{1,1}) \neq z(R_{(\alpha, \beta')})$.

□

Insbesondere gibt es zu jeder natürlichen Zahl einen 2-Brückenknoten, dessen Gruppe mindestens so viele nicht N -äquivalente Darstellungen besitzt, wie diese natürliche Zahl angibt, man wähle nur die Zahl p entsprechend groß. Es gilt sogar:

Bemerkung

Sei n eine beliebige natürliche Zahl und sei $|\beta| > 1$ ungerade. Dann gibt es unendlich viele Zahlen α , so daß die Gruppe des 2-Brückenknotens $b(\alpha, \beta)$ mindestens n nicht N -äquivalente Darstellungen mit zwei Erzeugenden und einer definierenden Relation besitzt.

Beweis

Man wähle $p = P^n$ mit einer Primzahl P .

□

Einige Beispiele für Knoten der Klasse 1.1 (t ist wieder die Anzahl der Teiler von p einschließlich 1 und p selbst):

	$\beta = 3$	$\beta = 5$	$\beta = 7$
$p = 2$	$b(11, 3) = b(11, -7)$ $t + 1 = 3$	$b(19, 5) = b(19, -15)$ $t + 1 = 3$	$b(27, 7) = b(27, -23)$ $t + 1 = 3$
$p = 3$	$b(17, 3) = b(17, -11)$ $t + 1 = 3$	$b(29, 5) = b(29, -23)$ $t + 1 = 3$	$b(41, 7) = b(41, -35)$ $t + 1 = 3$
$p = 4$	$b(23, 3) = b(23, -15)$ $t + 1 = 4$	$b(39, 5) = b(39, -31)$ $t + 1 = 4$	$b(55, 7) = b(55, -47)$ $t + 1 = 4$
$p = 5$	$b(29, 3) = b(29, -19)$ $t + 1 = 3$	$b(49, 5) = b(49, -39)$ $t + 1 = 3$	$b(69, 7) = b(69, -59)$ $t + 1 = 3$
$p = 6$	$b(35, 3) = b(35, -23)$ $t + 1 = 5$	$b(59, 5) = b(59, -47)$ $t + 1 = 5$	$b(83, 7) = b(83, -71)$ $t + 1 = 5$
$p = 7$	$b(41, 3) = b(41, -27)$ $t + 1 = 3$	$b(69, 5) = b(69, -55)$ $t + 1 = 3$	$b(97, 7) = b(97, -83)$ $t + 1 = 3$
$p = 8$	$b(47, 3) = b(47, -31)$ $t + 1 = 5$	$b(79, 5) = b(79, -63)$ $t + 1 = 5$	$b(111, 7) = b(111, -95)$ $t + 1 = 5$

2.2 Die Klasse 1.2

Bemerkung

Sei $p > 1$, $\frac{\sigma}{2} \in \mathbb{Z}$ ungerade und $|\sigma| > 2$. Dann ist

$$(\alpha, \beta) = (p|\sigma| + 1, \frac{\sigma}{2})$$

eine Normalform, d.h. α und β sind ungerade, teilerfremd und $-\alpha < \beta < \alpha$. Die andere Normalform (α, β') mit $b(\alpha, \beta) = b(\alpha, \beta')$, ist gegeben durch

$$\beta' = \begin{cases} \alpha - 2p, & \frac{\sigma}{2} < 0 \\ -\alpha + 2p, & \frac{\sigma}{2} > 0. \end{cases}$$

Beweis

Offenbar ist (α, β) eine Normalform; für $\beta > 0$ ist $\beta\beta' = 1 + 2\alpha(\frac{\beta-1}{2})$ und für $\beta < 0$ ist $\beta\beta' = 1 + 2\alpha(-\frac{\beta+1}{2})$ mit dem angegebenen β' . □

Definition

Die *Klasse 1.2* sei die Menge aller 2-Brückenknoten $b(\alpha, \beta)$ mit einer Normalform

$$(\alpha, \beta) = (p|\sigma| + 1, \frac{\sigma}{2})$$

wobei $\frac{\sigma}{2} \in \mathbb{Z}$ ungerade, $|\sigma| > 2$ und $p > 1$ ist.

2.2.1 Gruppendarstellungen der Knoten der Klasse 1.2

Lemma 4

Sei $b(\alpha, \beta) = b(\alpha, \beta')$ ein Knoten der Klasse 1.2, d.h. es ist $(\alpha, \beta) = (p|\sigma| + 1, \frac{\sigma}{2})$, $\beta' = \begin{cases} \alpha - 2p, & \frac{\sigma}{2} > 0 \\ -\alpha + 2p, & \frac{\sigma}{2} < 0 \end{cases}$, wobei $\frac{\sigma}{2} \in \mathbb{Z}$ ungerade, $|\sigma| > 2$ und $p > 1$ ist. Dann ist

$$R_{(\alpha, \beta)} \doteq (x_1 x_2)^p x_1 \left((x_2^{-1} x_1^{-1})^p x_1^{-1} (x_1 x_2)^p x_1 \right)^{\frac{|\beta|-1}{2}} (x_2^{-1} x_1^{-1})^p x_2^{-1} \\ \cdot \left((x_1 x_2)^p x_1^{-1} (x_2^{-1} x_1^{-1})^p x_1 \right)^{\frac{|\beta|-1}{2}}$$

und

$$\begin{aligned}
 R_{(\alpha, \beta')} &= x_1(x_2 x_1^{-1})^{\frac{|\beta|-1}{2}} \left(x_2(x_1 x_2^{-1})^{\frac{|\beta|-1}{2}} x_1(x_2 x_1^{-1})^{\frac{|\beta|-1}{2}} \right)^{p-1} \\
 &\quad \cdot x_2(x_1 x_2^{-1})^{\frac{|\beta|+1}{2}} \\
 &\quad \cdot x_1^{-1}(x_2 x_1^{-1})^{\frac{|\beta|-1}{2}} \left(x_2^{-1}(x_1 x_2^{-1})^{\frac{|\beta|-1}{2}} x_1^{-1}(x_2 x_1^{-1})^{\frac{|\beta|-1}{2}} \right)^{p-1} \\
 &\quad \cdot x_1^{-1}(x_1 x_2^{-1})^{\frac{|\beta|-1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Beweis

Die Relatoren $R_{(\alpha, \beta)}$ und $R_{(\alpha, \beta')}$ lassen sich wieder aus den Folgen der Längen zusammenhängender Teilwörter gleicher Exponenten bestimmen.

Behauptung 1: Sei $\frac{\sigma}{2} \geq 3$ ungerade und $p > 1$. Dann gehört zu $(\alpha, \beta) = (p\sigma + 1, \frac{\sigma}{2})$ die Längenfolge:

$$2p + 1 \underbrace{2p \dots 2p}_{\beta-1} 2p + 1 \underbrace{2p \dots 2p}_{\beta-1}$$

Beweis: Wegen $\frac{\alpha-1}{\beta} = 2p$ ist $\alpha_1 = 2p$ und $l_1 = 2p + 1$. Allgemeiner ist

$$\frac{k\alpha - 1}{\beta} = k2p + \frac{k-1}{\beta}$$

also $\alpha_k = k2p$ für $2 \leq k \leq \beta$, daraus folgt

$$l_k = 2p \text{ für } 2 \leq k \leq \beta$$

wie behauptet. □

Aus Behauptung 1 ergibt sich:

$$R_{(\alpha, \beta)} = (x_1 x_2)^p x_1 \left((x_2^{-1} x_1^{-1})^p (x_2 x_1)^p \right)^{\frac{|\beta|-1}{2}} (x_2^{-1} x_1^{-1})^p x_2^{-1} \\ \left((x_1 x_2)^p (x_1^{-1} x_2^{-1})^p \right)^{\frac{|\beta|-1}{2}}.$$

Die Längenfolge der anderen Normalform (α, β') ist:

Behauptung 2: Sei $\frac{\sigma}{2} \geq 3$ ungerade und $p > 1$. Dann ist die erste Hälfte der Längensfolge zu $(\alpha, \beta') = (p\sigma + 1, p\sigma + 1 - 2p)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \beta-2 & & \beta-2 & & \beta-2 & & \dots \\
 2 \quad \overbrace{1 \dots 1} & & 2 \quad \overbrace{1 \dots 1} & & 2 \quad \overbrace{1 \dots 1} & & 2 \quad \dots \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \text{Teilwort} & & \text{Teilwort} & & \text{Teilwort} & & \\
 \text{Nr. } \beta & & \text{Nr. } 2\beta-1 & & \text{Nr. } 3\beta-2 & & \\
 & & & & & & \\
 & & \beta-2 & & & & \beta-1 \\
 & & 2 \quad \overbrace{1 \dots 1} & & 2 & & \overbrace{1 \dots 1} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \text{Teilwort} & & \text{Teilwort} & & \\
 & & \text{Nr. } (2p-1)\beta+2-2p & & & &
 \end{array}$$

Beweis: Nach Voraussetzung ist $\frac{\sigma}{2} = \beta \geq 3$, deshalb ist

$$\frac{\alpha - 1}{\beta'} = 1 + \frac{2p - 1}{\beta'} \text{ und } \frac{2p - 1}{\beta'} < 1$$

also $\alpha_1 = 1$ und damit $l_1 = 2$. Allgemeiner ist

$$\frac{k\alpha - 1}{\beta'} = k + \frac{k2p - 1}{\beta'}.$$

Zur Berechnung der übrigen α_k ist der Term $\frac{k2p-1}{\beta'}$ abzuschätzen; offenbar ist

$$j < \frac{k2p-1}{\beta'} < j+1 \iff j(\beta-1) + \frac{j+1}{2p} < k < (j+1) \cdot (\beta-1) + \frac{j+2}{2p}.$$

Sei $k = j(\beta-1) + 1 + m$ mit $0 \leq m \leq \beta-2$. Dann ist für $0 \leq j \leq 2p-2$:

$$j(\beta-1) + 1 \leq k \leq (j+1)(\beta-1)$$

also auch

$$j(\beta-1) + \frac{j+1}{2p} < k < (j+1)(\beta-1) + \frac{j+2}{2p},$$

weil für $0 \leq j \leq 2p-2$ gilt:

$$0 < \frac{j+1}{2p} < 1 \text{ und } 0 < \frac{j+2}{2p} \leq 1.$$

Für diese Zahlen k ist dann $\alpha_k = k + j$. Daraus folgt

$$\alpha_{j(\beta-1)+1+m} = j\beta + 1 + m$$

und damit

$$l_{j(\beta-1)+1} = 2$$

$$l_{j(\beta-1)+1+m} = 1 \quad \text{für } 0 < m \leq \beta-2, \quad 0 \leq j \leq 2p-2.$$

Die übrigen α_k , d.h. $k = (2p-1)(\beta-1) + 1 + m$, $0 \leq m \leq \beta-1$ berechnen sich so: für $0 \leq m \leq \beta-1$ ist

$$(2p-1)(\beta-1) + 1 \leq k \leq 2p(\beta-1) + 1$$

insbesondere

$$(2p-1)(\beta-1) + 1 \leq k < 2p(\beta-1) + 1 + \frac{1}{2p}$$

also

$$2p - 1 \leq \frac{k2p - 1}{\beta'} < 2p.$$

Deshalb ist

$$\alpha_{(2p-1)(\beta-1)+1+m} = k + 2p - 1 = \beta(2p - 1) + 1 + m$$

folglich:

$$l_{(2p-1)(\beta-1)+1} = 2$$

$$l_{(2p-1)(\beta-1)+1+m} = 1 \quad \text{für } 0 < m \leq \beta - 1,$$

das war zu zeigen. □

Aus der oben bewiesenen Aussage folgt:

$$\begin{aligned} R_{(\alpha, \beta')} &= x_1 x_2 (x_1^{-1} x_2)^{\frac{|\beta|-3}{2}} x_1^{-1} \left(x_2 x_1 (x_2^{-1} x_1)^{\frac{|\beta|-3}{2}} x_2^{-1} x_1 x_2 \right. \\ &\quad \cdot (x_1^{-1} x_2)^{\frac{|\beta|-3}{2}} x_1^{-1} \Big)^{p-1} \\ &\quad \cdot x_2 x_1 (x_2^{-1} x_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} x_2^{-1} x_1^{-1} (x_2 x_1^{-1})^{\frac{|\beta|-3}{2}} x_2 \\ &\quad \cdot \left(x_1^{-1} x_2^{-1} (x_1 x_2^{-1})^{\frac{|\beta|-3}{2}} x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} \right. \\ &\quad \cdot (x_2 x_1^{-1})^{\frac{|\beta|-3}{2}} x_2 \Big)^{p-1} x_1^{-1} x_2^{-1} (x_1 x_2^{-1})^{\frac{|\beta|-1}{2}}. \end{aligned}$$

Dieser Relator läßt sich nach kurzer Rechnung auf die behauptete Form bringen. Insgesamt folgt Lemma 4. □

Die Relatoren $R_{(\alpha, \beta)}$ lassen Erzeugendenwechsel der beschriebenen Art zu:

Lemma 5

Sei $\frac{\sigma}{2} \in \mathbb{Z}$ ungerade, $|\sigma| > 2$ und $p > 1$. Seien j und q positive Zahlen mit $jq = p$. Dann besitzt die Gruppe $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ mit $(\alpha, \beta) = (p|\sigma|+1, \frac{\sigma}{2})$ eine Darstellung $\langle x_1, x_2 \mid K_{j,q}^{1,2} \rangle$ mit

$$K_{j,q}^{1,2} := x_2^{-1} \left(x_1 (x_2^q x_1^{-1} x_2^{-q} x_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} x_2^q x_1 (x_2^{-q} x_1^{-1} x_2^q x_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} x_2^{-q} \right)^j.$$

Beweis

Der erste Erzeugendenwechsel $y_2 = x_1 x_2$, $y_1 = x_1$ führt auf eine Gruppendarstellung

$$\langle y_1, y_2 \mid y_2^{-1} y_1 (y_2^p y_1^{-1} y_2^{-p} y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} y_2^p y_1 (y_2^{-p} y_1^{-1} y_2^p y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} y_2^{-p} \rangle.$$

Der zweite Erzeugendenwechsel $z_2 = y_2^j$ überführt diese Darstellung in

$$\langle y_1, z_2 \mid z_2^{-1} \left(y_1 (z_2^q y_1^{-1} z_2^{-q} y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} z_2^q y_1 (z_2^{-q} y_1^{-1} z_2^q y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} z_2^{-q} \right)^j \rangle,$$

das ist bis auf eine Umbenennung $z_2 \leftrightarrow x_2$, $y_1 \leftrightarrow x_1$ die Darstellung $\langle x_1, x_2 \mid K_{j,q}^{1,2} \rangle$.

□

Im nächsten Abschnitt werden die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid K_{j,q}^{1,2} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ in N -Äquivalenzklassen eingeteilt.

2.2.2 N -Äquivalenzklassen der Gruppendarstellungen

Lemma 6

Mit den Bezeichnungen aus Lemma 4 und 5 gilt:

$$(1) \quad z(K_{j,q}^{1,2}) = |\beta|(2j + 2p) + 1$$

$$(2) \quad z(R_{(\alpha,\beta)}) = (2p + 2)|\beta| + 1$$

$$z(R_{(\alpha,\beta')}) = 2p(|\beta| + 2) + 1$$

Beweis

Die Aussage (2) folgt aus [Fu]. Die Berechnung der minimalen zyklischen Länge von

$$K_{j,q}^{1,2} = x_2^{-1} \left(x_1 (x_2^q x_1^{-1} x_2^{-q} x_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} x_2^q x_1 (x_2^{-q} x_1^{-1} x_2^q x_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} x_2^{-q} \right)^j$$

geschieht in zwei Schritten.

1. Schritt: Durch Abzählen folgt

$$l(K_{j,q}^{1,2}) = 2p|\beta| + 2j|\beta| + 1.$$

2. Schritt: Die zyklische Länge von

$$\varphi_\epsilon(K_{j,q}^{1,2}) \doteq \left(x_1 (x_2^q x_1^{-1} x_2^{-q} x_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} x_2^{\epsilon+q} x_1 (x_2^{-q} x_1^{-1} x_2^q x_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} x_2^{\epsilon-q} \right)^j x_2^{-1}$$

beträgt

$$l\left(\varphi_\epsilon(K_{j,q}^{1,2})\right) = 2p|\beta| + 2j|\beta| + 1.$$

Die zyklische Länge von

$$\begin{aligned} \psi_\delta(K_{j,q}^{1,2}) &\doteq \left(x_1 ((x_2 x_1^\delta)^{q-1} x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} (x_1^{-\delta} x_2^{-1})^{q-1} x_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} (x_2 x_1^\delta)^{q-1} x_2 x_1 \right. \\ &\quad \cdot (x_2^{-1} (x_1^{-\delta} x_2^{-1})^{q-1} x_1^{-1} (x_2 x_1^\delta)^{q-1} x_2 x_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} \\ &\quad \left. \cdot x_2^{-1} (x_1^{-\delta} x_2^{-1})^{q-1} \right)^j x_1^{-\delta} x_2^{-1} \end{aligned}$$

beträgt

$$l(\psi_\delta(K_{j,q}^{1,2})) = 4p|\beta| + 2.$$

Aus $l(\varphi_c(K_{j,q}^{1,2})) = l(K_{j,q}^{1,2})$ und $l(\psi_\delta(K_{j,q}^{1,2})) > l(K_{j,q}^{1,2})$ folgt:

$$z(K_{j,q}^{1,2}) = l(K_{j,q}^{1,2}) = 2p|\beta| + 2j|\beta| + 1,$$

das war zu zeigen. □

Ein Vergleich der im vorigen Lemma berechneten minimalen zyklischen Länge der Relatoren ergibt:

Bemerkung

Sei $\frac{\sigma}{2} \in \mathbb{Z}$ ungerade, $|\sigma| > 2$ und $p > 1$. Seien j_1, q_1, j_2, q_2 positive Zahlen mit $j_1 q_1 = p = j_2 q_2$. Dann ist

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad z(K_{j_1, q_1}^{1,2}) &= z(K_{j_2, q_2}^{1,2}) \iff j_1 = j_2 \\ z(K_{j_1, q_1}^{1,2}) &\neq z(R_{(\alpha, \beta')}). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Einteilung der Gruppendarstellungen aus Lemma 4 und Lemma 5 in N -Äquivalenzklassen:

Satz 2

Sei $\frac{\sigma}{2} \in \mathbb{Z}$ ungerade, $|\sigma| > 2$ und $p > 1$. Sei t die Anzahl der Teiler von p einschließlich 1 und p selbst. Dann besitzt die Gruppe $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ eines Knotens $b(\alpha, \beta)$ der Klasse 1.2 mit $(\alpha, \beta) = (p|\sigma| + 1, \frac{\sigma}{2})$ mindestens $t + 1 \geq 3$ nicht N -äquivalente Darstellungen mit zwei Erzeugenden und einer definierenden Relation.

Beweis

Für die verschiedenen Teiler j von p bekommt man Relatoren, die zu nicht N -äquivalenten Gruppendarstellungen gehören, denn $z(K_{j_1, q_1}^{1,2}) \neq z(K_{j_2, q_2}^{1,2})$, falls $j_1 \neq j_2$ ist. Die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid K_{1,p}^{1,2} \rangle$ sind N -äquivalent, vgl. Lemma 5. Ferner ist $z(K_{j,q}^{1,2}) \neq z(R_{(\alpha, \beta')})$. □

Einige Beispiele für Knoten der Klasse 1.2 (t ist wieder die Anzahl der Teiler von p einschließlich 1 und p selbst):

	$\beta = 3$	$\beta = 5$	$\beta = 7$
$p = 2$	$b(13, 3) = b(13, 9)$ $t + 1 = 3$	$b(21, 5) = b(21, 17)$ $t + 1 = 3$	$b(29, 7) = b(29, 25)$ $t + 1 = 3$
$p = 3$	$b(19, 3) = b(19, 13)$ $t + 1 = 3$	$b(31, 5) = b(31, 25)$ $t + 1 = 3$	$b(43, 7) = b(43, 37)$ $t + 1 = 3$
$p = 4$	$b(25, 3) = b(25, 17)$ $t + 1 = 4$	$b(41, 5) = b(41, 33)$ $t + 1 = 4$	$b(57, 7) = b(57, 49)$ $t + 1 = 4$
$p = 5$	$b(31, 3) = b(31, 21)$ $t + 1 = 3$	$b(51, 5) = b(51, 41)$ $t + 1 = 3$	$b(71, 7) = b(71, 61)$ $t + 1 = 3$
$p = 6$	$b(37, 3) = b(37, 25)$ $t + 1 = 5$	$b(61, 5) = b(61, 49)$ $t + 1 = 5$	$b(85, 7) = b(85, 73)$ $t + 1 = 5$
$p = 7$	$b(43, 3) = b(43, 29)$ $t + 1 = 3$	$b(71, 5) = b(71, 57)$ $t + 1 = 3$	$b(99, 7) = b(99, 85)$ $t + 1 = 3$
$p = 8$	$b(49, 3) = b(49, 33)$ $t + 1 = 5$	$b(81, 5) = b(81, 65)$ $t + 1 = 5$	$b(113, 7) = b(113, 97)$ $t + 1 = 5$

2.3 Die Klasse 2.1

Bemerkung

Sei $\frac{\sigma}{2} \geq 2$ gerade und $p \geq 1$. Dann ist

$$(\alpha, \beta) = (p\sigma + 1, \alpha - \frac{\sigma}{2})$$

eine Normalform, d.h. α und β sind ungerade, teilerfremd und $-\alpha < \beta < \alpha$. Die andere Normalform (α, β') so daß $b(\alpha, \beta) = b(\alpha, \beta')$, ist gegeben durch

$$\beta' = -\alpha + 2p.$$

Beweis

Offenbar ist (α, β) eine Normalform; ferner gilt mit den angegebenen Zahlen α, β und β' : $\beta\beta' = 1 + 2\alpha(\frac{\sigma}{4} + p - \frac{p\sigma}{2} - 1)$.

□

Bemerkung

Nach Annahme ist $\frac{\sigma}{2} \geq 2$ gerade, also existiert eine Zahl $l \geq 1$, so daß $\sigma = 4l$. Dann ist $\alpha = 4pl + 1$, $\beta = 4pl - 2l + 1$ und $\beta' = -4pl + 2p - 1$, insbesondere folgt:

- (i) $\beta' = -\beta \iff p = l$
- (ii) Durch ein Vertauschen von p und l geht die Normalform (α, β) über in $(\alpha, -\beta')$.

In den Fällen $p = l$ ist $b(\alpha, \beta) = b(\alpha, \beta')$ ein amphicheiraler Knoten, für $l = 1$ oder $p = 1$ erhält man einen Twist-Knoten, vgl. Abschnitt 2.6.1.

Definition:

Die Klasse 2.1 sei die Menge aller 2-Brückenknoten $b(\alpha, \beta)$ mit einer Normalform

$$(\alpha, \beta) = (4pl + 1, 4pl + 1 - 2l)$$

wobei $p, l \geq 1$.

2.3.1 Gruppendarstellungen der Knoten der Klasse 2.1

Lemma 7

Sei $b(\alpha, \beta) = b(\alpha, \beta')$ ein Knoten der Klasse 2.1, d.h. es ist $(\alpha, \beta) = (4pl + 1, 4pl + 1 - 2l)$ und $\beta' = -4pl - 1 + 2p$, wobei $p, l \geq 1$ sind.

(1) Sei $p > 1$ und $l > 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} R_{(\alpha, \beta)} &\doteq x_1 x_2^{-1} \left((x_1 x_2^{-1})^p x_1^{-1} (x_2 x_1^{-1})^p x_1 \right)^l \\ &\quad \cdot \left((x_1 x_2^{-1})^p x_1 (x_2 x_1^{-1})^p x_1^{-1} \right)^l \\ R_{(\alpha, \beta')} &\doteq x_1 x_2^{-1} \left((x_1 x_2^{-1})^l x_1^{-1} (x_2 x_1^{-1})^l x_1 \right)^p \\ &\quad \cdot \left((x_1 x_2^{-1})^l x_1 (x_2 x_1^{-1})^l x_1^{-1} \right)^p \end{aligned}$$

(2) Sei $p \geq 1$ und $l = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} R_{(\alpha, \beta)} &\doteq x_1 x_2^{-1} (x_1 x_2^{-1})^p x_1^{-1} (x_2 x_1^{-1})^p x_1 (x_1 x_2^{-1})^p x_1 (x_2 x_1^{-1})^p x_1^{-1} \\ R_{(\alpha, \beta')} &\doteq (x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1})^p x_1 (x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1)^p x_2^{-1} \end{aligned}$$

(3) Sei $p = 1$ und $l \geq 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} R_{(\alpha, \beta)} &\doteq (x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1})^l x_1 (x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1)^l x_2^{-1} \\ R_{(\alpha, \beta')} &\doteq x_1 x_2^{-1} (x_1 x_2^{-1})^l x_1^{-1} (x_2 x_1^{-1})^l x_1 (x_1 x_2^{-1})^l x_1 (x_2 x_1^{-1})^l x_1^{-1} \end{aligned}$$

Beweis

Die Relatoren $R_{(\alpha, \beta)}$ und $R_{(\alpha, \beta')}$ lassen sich wieder aus der Folge der Längen der zusammenhängenden Teilwörter gleicher Exponenten bestimmen.

Behauptung 1: Sei $p > 1$ und $l > 1$. Dann ist die erste Hälfte der Längensfolge zu $(\alpha, \beta) = (4pl + 1, 4pl + 1 - 2l)$:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \overbrace{1 \dots 1}^{2p-2} \\ 2 \end{array} \left(\begin{array}{cc} \begin{array}{c} 2 \\ \uparrow \\ \text{Teilwort} \\ \text{Nr. } 2p \\ \text{Nr. } 6p - 2 \\ \vdots \\ \text{Nr. } 2p + \gamma(4p - 2) \\ \vdots \\ \text{Nr. } 2p + (l - 2)(4p - 2) \end{array} & \begin{array}{c} \overbrace{1 \dots 1}^{2p-2} \\ 2 \\ \uparrow \\ \text{Teilwort} \\ \text{Nr. } 4p - 1 \\ \text{Nr. } 8p - 3 \\ \vdots \\ \text{Nr. } 4p - 1 + \gamma(4p - 2) \\ \vdots \\ \text{Nr. } 4p - 1 + (l - 2)(4p - 2) \end{array} \end{array} \right)^{l-1} \begin{array}{c} \overbrace{1 \dots 1}^{2p-1} \\ 2 \\ \uparrow \\ \text{Teilwort} \\ \text{Nr. } 4lp - 2p - 2l + 2 \end{array}
 \end{array}$$

Beweis

Aus

$$\frac{k\alpha - 1}{\beta} = k + \frac{2kl - 1}{\beta}$$

folgt $\alpha_1 = 1$, also $l_1 = 2$ und für $1 \leq k \leq 2p - 1$ gilt die Ungleichung $2kl - 1 < \beta$, deshalb erhält man

$$l_1 = 2$$

$$l_k = 1 \quad \text{für } 2 \leq k \leq 2p - 1.$$

Jetzt sind nacheinander die α_k zu

$$(1) \quad \begin{aligned} k &= 2p + \gamma(4p - 2) + \delta \\ 0 &\leq \gamma \leq l - 2, \quad 0 \leq \delta \leq 2p - 2 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} k &= 4p - 1 + \gamma(4p - 2) + \delta \\ 0 &\leq \gamma \leq l - 2, \quad 0 \leq \delta \leq 2p - 2 \end{aligned}$$

und

$$(3) \quad \begin{aligned} k &= 4lp - 2p - 2l + 2 + \delta \\ 0 &\leq \delta \leq 2p - 1 \end{aligned}$$

zu berechnen. Im 1. Fall ergibt sich

$$\frac{k\alpha - 1}{\beta} = k + 1 + 2\gamma + \frac{2l - 2\gamma - 2 + 2l\delta}{\beta}$$

und

$$0 < \frac{2l - 2\gamma - 2 + 2l\delta}{\beta} < 1.$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned} \alpha_{2p+\gamma(4p-2)+\gamma} &= 2p + \gamma(4p - 2) + \delta + 1 + 2\gamma \\ \text{für } 0 &\leq \gamma \leq l - 2, \quad 0 \leq \delta \leq 2p - 2. \end{aligned}$$

Im Fall (2) ist

$$\frac{k\alpha - 1}{\beta} = k + 2 + 2\gamma + \frac{2l - 3 - 2\gamma + 2l\delta}{\beta}$$

und

$$0 < \frac{2l - 3 - 2\gamma + 2l\delta}{\beta} < 1.$$

Daraus folgt

$$\alpha_{4p-1+\gamma(4p-2)+\delta} = 4p + 1 + 4p\gamma + \delta$$

$$\text{für } 0 \leq \gamma \leq l-2, 0 \leq \delta \leq 2p-2.$$

Aus den Fällen (1) und (2) ergibt sich dann zusammen:

$$l_{2p+\gamma(4p-2)} = 2 \text{ für } 0 \leq \gamma \leq l-2$$

$$l_{2p+\gamma(4p-2)+\delta} = 1 \text{ für } 1 \leq \delta \leq 2p-2, 0 \leq \gamma \leq l-2$$

$$l_{4p-1+\gamma(4p-2)} = 2 \text{ für } 0 \leq \gamma \leq l-2$$

$$l_{4p-1+\gamma(4p-2)+\delta} = 1 \text{ für } 1 \leq \delta \leq 2p-2, 0 \leq \gamma \leq l-2$$

wie behauptet. Schließlich gilt im Fall (3):

$$\frac{k\alpha - 1}{\beta} = k + 2l - 1 + \frac{2l\delta}{\beta}$$

und

$$0 \leq \frac{2l\delta}{\beta} < 1,$$

also

$$\alpha_{4lp-2p-2l+\delta+2} = 4lp - 2p + \delta + 1$$

$$\text{für } 0 \leq \delta \leq 2p-1.$$

Schließlich folgt

$$l_{4lp-2p-2l+2} = 2$$

$$l_{4lp-2p-2l+\delta+2} = 1 \text{ für } 1 \leq \delta \leq 2p-1.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

□

Der Relator $R_{(\alpha,\beta)}$ besitzt also die Form

$$\begin{aligned}
 R_{(\alpha, \beta)} &= x_1 x_2 (x_1^{-1} x_2)^{p-1} \left(x_1^{-1} x_2^{-1} (x_1 x_2^{-1})^{p-1} x_1 x_2 (x_1^{-1} x_2)^{p-1} \right)^{l-1} \\
 &\quad \cdot x_1^{-1} x_2^{-1} (x_1 x_2^{-1})^{p-1} x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} (x_2 x_1^{-1})^{p-1} \\
 &\quad \left(x_2 x_1 (x_2^{-1} x_1)^{p-1} x_2^{-1} x_1^{-1} (x_2 x_1^{-1})^{p-1} \right)^{l-1} \\
 &\quad \cdot x_2 x_1 (x_2^{-1} x_1)^{p-1} x_2^{-1} \\
 &= x_1 x_2 (x_1^{-1} x_2)^{p-1} \left(x_1^{-1} x_1^{-1} x_1 x_2^{-1} (x_1 x_2^{-1})^{p-1} x_1 x_2 (x_1^{-1} x_2)^{p-1} \right)^{l-1} \\
 &\quad \cdot x_1^{-1} x_1^{-1} x_1 x_2^{-1} (x_1 x_2^{-1})^{p-1} x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} (x_2 x_1^{-1})^{p-1} \\
 &\quad \left(x_2 x_1^{-1} x_1 x_1 (x_2^{-1} x_1)^{p-1} x_2^{-1} x_1^{-1} (x_2 x_1^{-1})^{p-1} \right)^{l-1} \\
 &\quad \cdot x_2 x_1^{-1} x_1 x_1 (x_2^{-1} x_1)^{p-1} x_2^{-1} \\
 &= x_1 (x_2 x_1^{-1})^p \left(x_1^{-1} (x_1 x_2^{-1})^p x_1 (x_2 x_1^{-1})^p \right)^{l-1} \\
 &\quad x_1^{-1} (x_1 x_2^{-1}) (x_1 x_2^{-1})^p x_1^{-1} \\
 &\quad \cdot (x_2 x_1^{-1})^p \left(x_1 (x_1 x_2^{-1})^p x_1^{-1} (x_2 x_1^{-1})^p \right)^{l-1} x_1 (x_1 x_2^{-1})^p \\
 &\doteq x_1 x_2^{-1} \left((x_1 x_2^{-1})^p x_1^{-1} (x_2 x_1^{-1})^p x_1 \right)^l \left((x_1 x_2^{-1})^p (x_2 x_1^{-1})^p x_1^{-1} \right)^l
 \end{aligned}$$

wie behauptet. Der Relator $R_{(\alpha, \beta')}$ ergibt sich aus $R_{(\alpha, \beta)}$ durch ein Vertauschen von p und l . Damit folgt die Aussage (1).

Behauptung 2: Sei $p > 1$ und $l = 1$. Dann ist die erste Hälfte der Längefolge zu $(\alpha, \beta) = (4p + 1, 4p - 1)$ gegeben durch

$$\begin{array}{ccc}
 & \overbrace{2 \quad 1 \dots 1}^{2p-2} & \quad \quad \quad \overbrace{2 \quad 1 \dots 1}^{2p-1} \\
 & \uparrow & \\
 & \text{Teilwort} & \\
 & \text{Nr. } 2p &
 \end{array}$$

Beweis: Aus der Gleichung

$$\frac{k\alpha - 1}{\beta} = k + \frac{2k - 1}{\beta}$$

folgt $\alpha_1 = 1$, also $l_1 = 2$ und für $1 \leq k \leq 2p - 1$ gilt die Ungleichung $2k - 1 < \beta$, deshalb erhält man

$$l_1 = 2$$

$$l_k = 1 \quad \text{für } 2 \leq k \leq 2p - 1$$

$$l_{2p} = 2.$$

Für $k = 2p + \delta$, $0 \leq \delta \leq 2p - 1$ ist

$$\frac{k\alpha - 1}{\beta} = 2p + \delta + 1 + \frac{2\delta}{\beta}$$

und aus der Voraussetzung $0 \leq \delta \leq 2p - 1$ ergibt sich $2\delta < \beta$, schließlich $\alpha_k = 2p + \delta + 1$ und daraus

$$l_k = 1 \quad \text{für } 2p + 1 \leq k \leq 4p - 1.$$

□

Der Relator $R_{(\alpha, \beta)}$ besitzt die Form (vgl. die vorige Rechnung)

$$R_{(\alpha, \beta)} = x_1 x_2^{-1} (x_1 x_2^{-1})^p x_1^{-1} (x_1 x_2^{-1})^{-p} x_1 (x_1 x_2^{-1})^p x_1 (x_1 x_2^{-1})^{-p} x_1^{-1}.$$

Behauptung 3: Sei $p > 1$ und $l = 1$. Dann ist die Längenfolge zu $(\alpha, \beta') = (4p + 1, -2p - 1)$ gegeben durch:

$$\underbrace{2 \dots 2}_{2p} \quad 1 \quad \underbrace{2 \dots 2}_{2p} \quad 1$$

Beweis: Aus der Gleichung (sei hier ohne Einschränkung $\beta' := 2p + 1$)

$$\frac{k\alpha - 1}{\beta'} = 2k - 1 + \frac{2p - k}{\beta'}$$

und der Ungleichung

$$0 \leq 2p - k < 2p + 1 \iff 0 \leq k \leq 2p$$

folgt $\alpha_k = 2k - 1$ für $1 \leq k \leq 2p$, deshalb ist

$$l_k = 2 \quad \text{für} \quad 1 \leq k \leq 2p.$$

Ferner ist

$$\frac{\beta' \alpha - 1}{\beta'} = 4p + \frac{2p}{\beta'},$$

also

$$l_{2p+1} = 1.$$

Der Relator $R_{(\alpha, \beta')}$ besitzt demnach die Form

$$R_{(\alpha, \beta')} = (x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1})^p x_1 (x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1)^p x_2^{-1}.$$

Die Zahlen α, β, β' des Falles (3) mit $p = 1, l \geq 1$ und $\alpha = 4l + 1, \beta = 2l + 1, \beta' = -4l + 1$ sind symmetrisch zu denen des vorigen Falles (2) mit $p > 1, l = 1$ und $\alpha = 4p + 1, \beta = 4p - 1, \beta' = -2p - 1$.

Damit ist Lemma 7 bewiesen. □

Lemma 8

Seien $p, l \geq 1$ und $b(\alpha, \beta)$ ein Knoten der Klasse 2.1, d.h. $(\alpha, \beta) = (4pl + 1, 4pl + 1 - 2l)$.

- (1) Seien $p, l > 1$ und j, q, x und y positive Zahlen mit und $xy = l$. Dann besitzt die Gruppe $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid K_{j,q}^{2,1} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{x,y}^{2,1} \rangle$, wobei

$$K_{j,q}^{2,1} := x_2^{-1} \left((x_1 x_2^q x_1^{-1} x_2^{-q})^l (x_1^{-1} x_2^q x_1 x_2^{-q})^l \right)^j$$

$$\tilde{K}_{x,y}^{2,1} := x_2^{-1} \left((x_1 x_2^y x_1^{-1} x_2^{-y})^p (x_1^{-1} x_2^y x_1 x_2^{-y})^p \right)^x$$

- (2) Seien $p \geq 1$, $l = 1$ und j, q positive Zahlen mit $jq = p$. Dann besitzt die Gruppe $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ eine Darstellung $\langle x_1 x_2 \mid K_{j, q}^{2,1} \rangle$ mit

$$K_{j, q}^{2,1} := x_2^{-1} (x_1 x_2^q x_1^{-1} x_2^{-q} x_1^{-1} x_2^q x_1 x_2^{-q})^j.$$

- (3) Seien $p = 1$, $l \geq 1$ und x, y positive Zahlen mit $xy = l$. Dann besitzt die Gruppe $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ eine Darstellung $\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{x, y}^{2,1} \rangle$, wobei

$$\tilde{K}_{x, y}^{2,1} := x_2^{-1} (x_1 x_2^y x_1^{-1} x_2^{-y} x_1^{-1} x_2^y x_1 x_2^{-y})^x.$$

Beweis

Es genügt, (1) zu zeigen. Der erste Erzeugendenwechsel $y_2 = x_1 x_2^{-1}$, $y_1 = x_1$ überführt die Darstellung $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ in

$$\langle y_1, y_2 \mid y_2 (y_2^p y_1^{-1} y_2^{-p} y_1)^l (y_2^p y_1 y_2^{-p} y_1^{-1})^l \rangle.$$

Seien j, q positive Zahlen mit $jq = p$. Der Erzeugendenwechsel $z_2 = y_2^j$ führt dann auf

$$\begin{aligned} & \langle y_1, y_2, z_2 \mid z_2 = y_2^j, y_2 = (y_1 y_2^p y_1^{-1} y_2^{-p})^l (y_1^{-1} y_2^p y_1 y_2^{-p})^l \rangle \\ & \cong \langle y_1, z_2 \mid z_2^{-1} \left((y_1 z_2^q y_1^{-1} z_2^{-q})^l (y_1^{-1} z_2^q y_1 z_2^{-q})^l \right)^j \rangle, \end{aligned}$$

das ist bis auf eine Umbenennung $y_1 \leftrightarrow x_1$, $z_2 \leftrightarrow x_2$ die Darstellung $\langle x_1 x_2 \mid K_{j, q}^{2,1} \rangle$.

Sind x, y positive Zahlen mit $xy = l$, ergibt sich nach den Erzeugendenwechseln $y_2 = x_1 x_2^{-1}$, $y_1 = x_1$ und $z_2 = y_2^x$ aus der Darstellung $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ die Darstellung $\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{x, y}^{2,1} \rangle$.

□

Im Fall $p = l$ ist $\beta = -\beta'$, deshalb sind die Relatoren $R_{(\alpha, \beta)}$ und $R_{(\alpha, \beta')}$ zyklisch gleich. Im anderen Fall, d.h. $p \neq l$ erlauben beide Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ Erzeugendenwechsel, die auf Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid K_{j,q}^{2,1} \rangle$ bzw. $\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{x,y}^{2,1} \rangle$ führen. Im nächsten Abschnitt werden diese Darstellungen in N -Äquivalenzklassen eingeteilt.

2.3.2 N -Äquivalenzklassen der Gruppendarstellungen

Die Einteilung der Gruppendarstellungen aus Lemma 8 wird mit dem folgenden Lemma aus [B] vorgenommen:

Lemma (Brunner)

Seien $\langle x_1, x_2 \mid x_1^s w(x_1, x_2) \rangle \cong \langle x_1, x_2 \mid x_1^s v(x_1, x_2) \rangle$ N -äquivalente Gruppendarstellungen, wobei $s \geq 1$ und $w, v \in F'$, $F = \langle x_1, x_2 \mid \rangle$ und F' ist die Kommutatoruntergruppe von F . Dann ist $x_1^s v(x_1, x_2)$ in F konjugiert zu $\left(x_1^{\varepsilon} w(x_1^{\varepsilon}, x_1^{\varepsilon} x_2^{\varepsilon'}) \right)^{\pm 1}$ mit einer Zahl $c \in \mathbb{Z}$ und $\varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm 1\}$.

Hier wird das Problem der N -Äquivalenz zweier Gruppendarstellungen auf ein Konjugationsproblem in der freien Gruppe $\langle x_1, x_2 \mid \rangle$ zurückgeführt. Ob zwei Wörter $R, S \in \langle x_1, x_2 \mid \rangle$ in $\langle x_1, x_2 \mid \rangle$ konjugiert sind oder nicht, ist entscheidbar, siehe [LS, Prop. 2.14].

Lemma 9

- (1) Seien $p > 1, l \geq 1$ und j_1, q_1, j_2, q_2 positive Zahlen mit $j_1, q_1 = j_2 q_2 = p$. Dann sind die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid K_{j_1, q_1}^{2,1} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid K_{j_2, q_2}^{2,1} \rangle$ nicht N -äquivalent, falls $j_1 \neq j_2$ ist.

- (2) Seien $p, l > 1$ und j, q, x und y positive Zahlen mit $jq = p$ und $zy = l$. Dann sind die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid K_{j,q}^{2,1} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{x,y}^{2,1} \rangle$ nicht N -äquivalent, falls $p \neq l$ ist.
- (3) Seien $p > 1, l = 1$ und j, q positive Zahlen mit $jq = p$. Dann sind die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid K_{j,q}^{2,1} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha,\beta')} \rangle$ nicht N -äquivalent.

Beweis

Der Erzeugendenwechsel $x_2 \rightarrow x_1^{-1}, x_1 \rightarrow x_2$ bringt die Relatoren $K_{j,q}^{2,1}$ und $\tilde{K}_{x,y}^{2,1}$ auf die Form

$$R_{j,q}^{2,1} := x_1 \left((x_2 x_1^{-q} x_2^{-1} x_1^q)^l (x_2^{-1} x_1^{-q} x_2 x_1^q)^l \right)^j$$

$$\tilde{R}_{x,y}^{2,1} := x_1 \left((x_2 x_1^{-y} x_2^{-1} x_1^y)^p (x_2^{-1} x_1^{-y} x_2 x_1^y)^p \right)^x$$

Zum Beweis von (1) sei angenommen, daß es zwei Paare positiver Zahlen j_1, q_1 und j_2, q_2 gibt mit $j_1 q_1 = j_2 q_2$, so daß die beiden Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{j_1 q_1}^{2,1} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{j_2 q_2}^{2,1} \rangle$ N -äquivalent sind. Aufgrund des Lemmas aus [B] gibt es eine Zahl $c \in \mathbb{Z}$ und Zahlen $\varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm 1\}$, so daß in $\langle x_1, x_2 \mid \rangle$ die beiden Wörter

$$x_1 \left((x_2 x_1^{-q_1} x_2^{-1} x_1^{q_1})^l (x_2^{-1} x_1^{-q_1} x_2 x_1^{q_1})^l \right)^{j_1}$$

und

$$\left(x_1^\varepsilon (x_1^c (x_2^{\varepsilon'} x_1^{-\varepsilon q_2} x_2^{-\varepsilon'} x_1^{\varepsilon q_2})^l x_1^{-c} (x_2^{-\varepsilon'} x_1^{-\varepsilon q_2} x_2^{\varepsilon'} x_1^{\varepsilon q_2})^l)^{j_2} \right)^{\pm 1}$$

zueinander konjugiert sind. Das ist für $j_1 \neq j_2$ unmöglich, denn das erste Wort enthält $4lj_1$ -mal den Buchstaben x_2 , das zweite Wort enthält, unabhängig von der speziellen Wahl der Zahlen $c \in \mathbb{Z}, \varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$, $4lj_2$ -mal den Buchstaben x_2 .

Analog sei zum Beweis von (2) angenommen, daß es positive Zahlen j, q und x, y gibt mit $jq = p$ und $xy = l$, so daß die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{j,q}^{2,1} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid \tilde{R}_{x,y}^{2,1} \rangle$ N -äquivalent sind. Dann gibt es eine Zahl $c \in \mathbb{Z}$, Zahlen $\varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm 1\}$, so daß die beiden Wörter

$$x_1 \left((x_2 x_1^{-q} x_2^{-1} x_1^q)^l (x_2^{-1} x_1^{-q} x_2 x_1^q)^l \right)^j$$

und

$$\left(x_1^\varepsilon (x_1^c (x_2^{\varepsilon'} x_1^{-\varepsilon y} x_2^{-\varepsilon'} x_1^{\varepsilon y})^p x_1^{-c} (x_2^{-\varepsilon'} x_1^{-\varepsilon y} x_2^{\varepsilon'} x_1^{\varepsilon y})^p)^x \right)^{\pm 1}$$

in $\langle x_1, x_2 \mid \rangle$ konjugiert sind. Das ist für $p \neq l$ unmöglich, da für keine Wahl von $\varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm 1\}$ und $c \in \mathbb{Z}$ die Aufeinanderfolge der Exponenten von x_2 in den beiden Wörtern zyklisch ist.

Zum Beweis von (3) seien jetzt $p > 1$, $l = 1$ und j, q positive Zahlen mit $jq = p$. Der Übergang $x_1 \rightarrow x_1 x_2$, $x_2 \rightarrow x_2$ bringt $R_{(\alpha, \beta')}$ auf die Form

$$R := x_1 (x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1)^p (x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1})^p.$$

Angenommen, die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid K_{j,q}^{2,1} \rangle$ sind N -äquivalent. Dann gibt es eine Zahl $c \in \mathbb{Z}$ und Zahlen $\varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm 1\}$, so daß die beiden Wörter

$$x_1 (x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1)^p (x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1})^p$$

und

$$\left(x_1^\varepsilon (x_1^c x_2^{\varepsilon'} x_1^{-\varepsilon q} x_2^{-\varepsilon'} x_1^{\varepsilon q} x_1^{-c} x_2^{-\varepsilon'} x_1^{-\varepsilon q} x_2^{\varepsilon'} x_1^{\varepsilon q})^j \right)^{\pm 1}$$

in $\langle x_1, x_2 \mid \rangle$ zueinander konjugiert sind. Für $p > 1$ ist die Aufeinanderfolge der Exponenten von x_2 aber für keine Zahl $c \in \mathbb{Z}$ oder $\varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm 1\}$ zyklisch gleich.

□

Satz 3

Seien $p, l \geq 1$ und $b(\alpha, \beta)$ ein Knoten der Klasse 2.1, d.h. $(\alpha, \beta) = (4pl + 1, 4pl + 1 - 2l)$. Sei t_1 die Anzahl der Teiler von p einschließlich 1 und p , t_2 sei die Anzahl der Teiler von l einschließlich 1 und l . Dann gilt:

- (1) Falls $p, l > 1$ und $p \neq l$ ist, besitzt die Gruppe $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ mindestens $t_1 + t_2$ Darstellungen, die nicht N -äquivalent sind, also mindestens vier N -Äquivalenzklassen.
- (2) Falls $p, l > 1$ und $p = l$ ist, besitzt die Gruppe $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ mindestens t_1 Darstellungen, die nicht N -äquivalent sind, also mindestens zwei N -Äquivalenzklassen.
- (3) Falls $p > 1$ und $l = 1$ oder $p = 1$ und $l > 1$ ist, besitzt die Gruppe $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ mindestens $t_1 + 1$ bzw. $t_2 + 1$ Darstellungen, die nicht N -äquivalent sind, also mindestens drei N -Äquivalenzklassen.

Beweis

Der Beweis von Satz 3 ergibt sich aus Lemma 9. Im Fall (1) mit $p, l > 1$ sind die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid K_{j_1, q_1}^{2,1} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid K_{j_2, q_2}^{2,1} \rangle$ für $j_1 \neq j_2$ nicht N -äquivalent, wobei $j_1 q_1 = j_2 q_2 = p$. Für Zahlen $\tilde{x}_1, \tilde{y}_1$ und $\tilde{x}_2, \tilde{y}_2$ mit $\tilde{x}_1 \tilde{y}_1 = \tilde{x}_2 \tilde{y}_2 = l$ und $\tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2$ sind analog die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{\tilde{x}_1, \tilde{y}_1}^{2,1} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{\tilde{x}_2, \tilde{y}_2}^{2,1} \rangle$ nicht N -äquivalent, vgl. (1) von Lemma 9; nach (2) von Lemma 9 sind für $p \neq l$ alle diese Gruppendarstellungen nicht N -äquivalent.

Im Fall (2) ist nach Voraussetzung $p = l$, dann ist $R_{(\alpha, \beta)} \doteq R_{(\alpha, \beta')}$, die Behauptung folgt aus (1) von Lemma 9.

Die Behauptung im Fall (3) folgt aus (3) von Lemma 9.

□

Bemerkung

Sei n eine beliebige natürliche Zahl. Dann gibt es unendlich viele amphicheirale 2-Brückenknoten, deren Gruppe mindestens n nicht N -äquivalente Darstellungen mit zwei Erzeugenden und einer definierenden Relation besitzt.

Es gibt amphicheirale 2-Brückenknoten, die nicht in der Klasse 2.1 enthalten sind.

Einige Beispiele für Knoten der Klasse 2.1 (t_1 ist wieder die Anzahl der Teiler von p einschließlich 1 und p und t_2 ist die Anzahl der Teiler von l einschließlich 1 und l):

	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
$l = 1$	$b(5, 3) =$ $b(5, -3)$ $t_1 = 1$	$b(9, 7) =$ $b(9, -5)$ $t_1 + t_2 = 3$	$b(13, 11) =$ $b(13, -7)$ $t_1 + t_2 = 3$	$b(17, 15) =$ $b(17, -9)$ $t_1 + t_2 = 4$	$b(21, 19) =$ $b(21, -11)$ $t_1 + t_2 = 3$
$l = 2$	$b(9, 5) =$ $b(9, -7)$ $t_1 + t_2 = 3$	$b(17, 13) =$ $b(17, -13)$ $t_1 = 2$	$b(25, 21) =$ $b(25, -19)$ $t_1 + t_2 = 4$	$b(33, 29) =$ $b(33, -25)$ $t_1 + t_2 = 5$	$b(41, 37) =$ $b(41, -31)$ $t_1 + t_2 = 4$
$l = 3$	$b(13, 7) =$ $b(13, -11)$ $t_1 + t_2 = 3$	$b(25, 19) =$ $b(25, -21)$ $t_1 + t_2 = 4$	$b(37, 31) =$ $b(37, -31)$ $t_1 = 2$	$b(49, 43) =$ $b(49, -41)$ $t_1 + t_2 = 5$	$b(61, 55) =$ $b(61, -51)$ $t_1 + t_2 = 4$
$l = 4$	$b(17, 9) =$ $b(17, -15)$ $t_1 + t_2 = 4$	$b(33, 25) =$ $b(33, -29)$ $t_1 + t_2 = 5$	$b(49, 41) =$ $b(49, -43)$ $t_1 + t_2 = 5$	$b(65, 57) =$ $b(65, -57)$ $t_1 = 3$	$b(81, 73) =$ $b(81, -71)$ $t_1 + t_2 = 5$

2.4 Die Klasse 2.2

Bemerkung

Sei $\frac{\sigma}{2} \geq 2$ gerade und $p \geq 1$. Dann ist

$$(\alpha, \beta) = (p\sigma - 1, \alpha - \frac{\sigma}{2})$$

eine Normalform, d.h. α und β sind ungerade, teilerfremd und $-\alpha < \beta < \alpha$. Die andere Normalform (α, β') , so daß $b(\alpha, \beta) = b(\alpha, \beta')$, ist gegeben durch

$$\beta' = \alpha - 2p.$$

Beweis

Offenbar ist (α, β) eine Normalform; mit den angegebenen Zahlen α, β und β' gilt dann $\beta\beta' = 1 + 2\alpha(\frac{p\sigma}{2} - \frac{\sigma}{4} - p)$.

□

Bemerkung

Nach Annahme ist $\frac{\sigma}{2} \geq 2$ gerade, also existiert eine Zahl $l \geq 1$, so daß $\sigma = 4l$. Dann ist $\alpha = 4pl - 1$, $\beta = 4pl - 1 - 2l$ und $\beta' = 4pl - 1 - 2p$; daraus folgt:

(i)) $\beta' = \beta \iff p = l$

(ii) Durch ein Vertauschen von p und l geht die Normalform (α, β) über in (α, β') .

In den Fällen $p = l$ ist $b(\alpha, \beta)$ ein Knoten, der nur eine Normalform (α, β) besitzt, für $l = 1$ oder $p = 1$ erhält man einen Twist-Knoten, vgl. Abschnitt 2.6.1.

Definition

Die Klasse 2.2 sei die Menge aller 2-Brückenknoten $b(\alpha, \beta)$ mit einer Normalform (α, β) oder $(\alpha, -\beta)$, wobei

$$(\alpha, \beta) = (4pl - 1, 4pl - 1 - 2l)$$

und $p, l \geq 1$, aber p und l nicht gleichzeitig gleich 1 sind.

2.4.1 Gruppendarstellungen der Knoten der Klasse 2.2

Lemma 10

Sei $b(\alpha, \beta) = b(\alpha, \beta')$ ein Knoten der Klasse 2.2, es sei $(\alpha, \beta) = (4pl - 1, 4pl - 1 - 2l)$ und $\beta' = 4pl - 1 - 2p$, wobei $p, l \geq 1$ und p, l sind nicht gleichzeitig gleich 1.

(1) Sei $p > 1$ und $l > 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} R_{(\alpha, \beta)} &\doteq x_1 x_2^{-1} \left(x_1^{-1} (x_1 x_2^{-1})^p x_1 (x_1 x_2^{-1})^{-p} \right)^l \\ &\quad \left(x_1 (x_1 x_2^{-1})^p x_1^{-1} (x_1 x_2^{-1})^{-p} \right)^l \\ R_{(\alpha, \beta')} &\doteq x_1 x_2^{-1} \left(x_1^{-1} (x_1 x_2^{-1})^l x_1 (x_1 x_2^{-1})^{-l} \right)^p \\ &\quad \cdot \left(x_1 (x_1 x_2^{-1})^l x_1^{-1} (x_1 x_2^{-1})^{-l} \right)^p \end{aligned}$$

(2) Sei $p > 1$ und $l = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} R_{(\alpha, \beta)} &\doteq x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} (x_1 x_2^{-1})^p x_1 (x_1 x_2^{-1})^{-p} x_1 (x_1 x_2^{-1})^p x_1^{-1} (x_1 x_2^{-1})^{-p} \\ R_{(\alpha, \beta')} &\doteq x_1 x_2 x_1 (x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1)^{p-1} x_2^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1} (x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1})^{p-1} \end{aligned}$$

(3) Sei $p = 1$ und $l > 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} R_{(\alpha, \beta)} &\doteq x_1 x_2 x_1 (x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1)^{l-1} x_2^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1} (x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1})^{l-1} \\ R_{(\alpha, \beta')} &\doteq x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} (x_1 x_2^{-1})^l x_1 (x_1 x_2^{-1})^{-l} x_1 (x_1 x_2^{-1})^l x_1^{-1} (x_1 x_2^{-1})^{-l} \end{aligned}$$

Beweis

Die Relatoren $R_{(\alpha, \beta)}$ und $R_{(\alpha, \beta')}$ sind wieder durch die Folge der Längen der zusammenhängenden Teilwörter gleicher Exponenten gegeben.

Behauptung 1: Sei $p > 1$ und $l > 1$. Dann ist die erste Hälfte der Längensfolge zu $(\alpha, \beta) = (4pl - 1, 4pl - 1 - 2l)$:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 2p-3 \\ \underbrace{1 \dots 1} \end{array} \quad \left(\begin{array}{c} 2 \qquad \qquad \begin{array}{c} 2p-2 \\ \underbrace{1 \dots 1} \end{array} \qquad \qquad 2 \\ \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\ \text{Teilwort} \qquad \text{Teilwort} \\ \text{Nr. } 2p-1 \qquad \text{Nr. } 4p-2 \\ \text{Nr. } 6p-3 \qquad \text{Nr. } 8p-4 \\ \vdots \qquad \qquad \vdots \\ \text{Nr. } 2p-1 + \gamma(4p-2) \qquad \text{Nr. } 4p-2 + \gamma(4p-2) \\ \vdots \qquad \qquad \vdots \\ \text{Nr. } 2p-1 + (l-2)(4p-2) \qquad \text{Nr. } 4p-2 + (l-2)(4p-2) \end{array} \right. \\
 \begin{array}{c} 2p-2 \\ \underbrace{1 \dots 1} \end{array} \quad \left. \right)^{l-1} \begin{array}{c} 2 \qquad \qquad \begin{array}{c} 2p-2 \\ \underbrace{1 \dots 1} \end{array} \\ \uparrow \\ \text{Teilwort} \\ \text{Nr. } 4pl - 2p - 2l + 1 \end{array}
 \end{array}$$

Beweis

Zunächst ist

$$\frac{k\alpha - 1}{\beta} = k + \frac{2lk - 1}{\beta}$$

und es gilt die Abschätzung

$$0 < \frac{2lk - 1}{\beta} < 1 \iff 1 \leq k < 2p - 1.$$

Für $k = 2p - 1$ ist

$$\frac{2lk - 1}{\beta} = 1$$

das bedeutet:

$$\alpha_k = k \quad \text{für } 1 \leq k \leq 2p-2$$

$$\alpha_{2p-1} = 2p$$

und folglich:

$$l_1 = 2$$

$$l_k = 1 \quad \text{für } 2 \leq k \leq 2p-2$$

$$l_{2p-1} = 2.$$

Jetzt werden nacheinander die α_k zu

$$(1) \quad \begin{aligned} k &= 2p-1 + \gamma(4p-2) + \delta \\ 0 &\leq \gamma \leq l-2, \quad 0 \leq \delta \leq 2p-2 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} k &= 4p-2 + \gamma(4p-2) + \delta \\ 0 &\leq \gamma \leq l-2, \quad 0 \leq \delta \leq 2p-2 \end{aligned}$$

und

$$(3) \quad \begin{aligned} k &= 4pl - 2p - 2l + 1 + \delta \\ 0 &\leq \delta \leq 2p-2 \end{aligned}$$

berechnet. Im Fall (1) ist

$$\frac{k\alpha - 1}{\beta} = k + 1 + 2\gamma + \frac{2l\delta + 2\gamma}{\beta}$$

und $2l\delta + 2\gamma < \beta$. Also ist

$$\begin{aligned} \alpha_{2p-1+\gamma(4p-2)+\delta} &= 2p + 4\gamma p + \delta \\ \text{für } 0 &\leq \gamma \leq l-2, \quad 0 \leq \delta \leq 2p-2. \end{aligned}$$

Im Fall (2) ergibt sich

$$\frac{k\alpha - 1}{\beta} = k + 2 + 2\gamma + \frac{2l\delta + 1 + 2\gamma}{\beta}$$

und $2l\delta + 1 + 2\gamma < \beta$, folglich ist

$$\alpha_{4p-2+\gamma(4p-2)+\delta} = 4p + 4\gamma p + \delta.$$

Die Fälle (1) und (2) zusammen ergeben dann:

$$\begin{aligned} l_{2p-1+\gamma(4p-2)} &= 2 \quad \text{für } 0 \leq \gamma \leq l-2 \\ l_{2p-1+\gamma(4p-2)+\delta} &= 1 \quad \text{für } 1 \leq \delta \leq 2p-2, 0 \leq \gamma \leq l-2 \\ l_{4p-2+\gamma(4p-2)} &= 2 \quad \text{für } 0 \leq \gamma \leq l-2 \\ l_{4p-2+\gamma(4p-2)+\delta} &= 1 \quad \text{für } 1 \leq \delta \leq 2p-2, 0 \leq \gamma \leq l-2 \end{aligned}$$

Schließlich bleibt noch der Fall (3) zu betrachten:

$$\frac{k\alpha - 1}{\beta} = k + 2l - 1 + \frac{2\delta l + 2l - 2}{\beta}$$

und $0 < 2\delta l + 2l - 2 < \beta$. Deshalb ist

$$\alpha_{4pl-2p-2l+1+\delta} = 4pl - 2p + \delta \quad \text{für } 0 \leq \delta \leq 2p-2$$

und für die noch zu berechnenden l_k folgt:

$$\begin{aligned} l_{4pl-2p-2l+1} &= 2 \\ l_{4pl-2p-2l+1+\delta} &= 1 \quad \text{für } 1 \leq \delta \leq 2p-2, \end{aligned}$$

das war zu zeigen.

Für den Relator $R_{(\alpha,\beta)}$ folgt jetzt im Fall $p > 1$ und $l > 1$:

$$\begin{aligned} R_{(\alpha,\beta)} &= x_1 x_2 (x_1^{-1} x_2)^{p-2} x_1^{-1} \left(x_2 x_1 (x_2^{-1} x_1)^{p-1} x_2^{-1} x_1^{-1} (x_2 x_1^{-1})^{p-1} \right)^{l-1} \\ &\quad \cdot x_2 x_1 (x_2^{-1} x_1)^{p-1} \\ &\quad x_2^{-1} x_1^{-1} (x_2 x_1^{-1})^{p-2} x_2 \left(x_1^{-1} x_2^{-1} (x_1 x_2^{-1})^{p-1} x_1 x_2 (x_1^{-1} x_2)^{p-1} \right)^{l-1} \\ &\quad \cdot x_1^{-1} x_2^{-1} (x_1 x_2^{-1})^{p-1} \\ &\doteq \left(x_1 (x_1 x_2^{-1})^p x_1^{-1} (x_1 x_2^{-1})^{-p} \right)^l x_1 x_2^{-1} \left(x_1^{-1} (x_1 x_2^{-1})^p x_1 (x_1 x_2^{-1})^{-p} \right)^l \end{aligned}$$

wie behauptet.

Der Relator $R_{(\alpha, \beta')}$ ergibt sich im Fall $p, l > 1$ aus $R_{(\alpha, \beta)}$ durch ein Vertauschen von p und l . Damit ist die Aussage (1) bewiesen.

Zum Beweis von (2) sei jetzt $p > 1$ und $l = 1$.

Behauptung 2: Sei $p > 1$ und $l = 1$. Dann ist die erste Hälfte der Längensfolge zu $(\alpha, \beta) = (4p - 1, 4p - 3)$ gegeben durch

$$\begin{array}{ccc} 2 & \overbrace{1 \dots 1}^{2p-3} & 2 & \overbrace{1 \dots 1}^{2p-2} \\ & & \uparrow & \\ & & \text{Teilwort} & \\ & & \text{Nr. } 2p-1 & \end{array}$$

Beweis: Wie oben ist

$$\frac{k\alpha - 1}{\beta} = k + \frac{2k - 1}{\beta} \text{ und } 0 < \frac{2k - 1}{\beta} < 1 \iff 1 \leq k \leq 2p - 2.$$

Für $k = 2p - 1$ ist

$$\frac{2k - 1}{\beta} = 1,$$

das bedeutet $\alpha_k = k$ für $1 \leq k \leq 2p - 2$, $\alpha_{2p-1} = 2p$, daraus folgt

$$l_1 = 2$$

$$l_k = 1 \quad \text{für } 2 \leq k \leq 2p - 2$$

$$l_{2p-1} = 2$$

Für die restlichen α_k mit $k = 2p - 1 + \delta$, $1 \leq \delta \leq 2p - 2$ ergibt sich

$$\frac{k\alpha - 1}{\beta} = 2p + \delta + \frac{2\delta}{\beta}$$

mit $2\delta < \beta$, also $\alpha_k = 2p + \delta$ für $k = 2p + 1 + \delta$, $1 \leq \delta \leq 2p - 2$ schließlich

$$l_{2p+\delta} = 1 \quad \text{für } 0 \leq \delta \leq 2p - 3.$$

Im Fall $p > 1$ und $l = 1$ besitzt der Relator $R_{(\alpha, \beta)}$ die Form

$$\begin{aligned} R_{(\alpha, \beta)} &= x_1 x_2 (x_1^{-1} x_2)^{p-2} x_1^{-1} x_2 x_1 (x_2^{-1} x_1)^{p-1} x_2^{-1} x_1^{-1} (x_2 x_1^{-1})^{p-2} \\ &\quad \cdot x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} (x_1 x_2^{-1})^{p-1} \\ &\doteq x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} (x_1 x_2^{-1})^p x_1 (x_2 x_1^{-1})^p x_1 (x_1 x_2^{-1})^p x_1^{-1} (x_2 x_1^{-1})^p. \end{aligned}$$

Behauptung 3: Sei $p > 1$ und $l = 1$. Dann ist die Längenfolge zu $(\alpha, \beta') = (4p - 1, 2p - 1)$ gegeben durch

$$3 \quad \overbrace{2 \dots 2}^{2p-2} \quad 3 \quad \overbrace{2 \dots 2}^{2p-2}$$

Beweis: Aus

$$\frac{k\alpha - 1}{\beta'} = 2k + \frac{k - 1}{\beta'} \text{ und } k - 1 < \beta' \iff k \leq 2p - 1$$

folgt $\alpha_k = 2k$ für $2 \leq k \leq 2p - 1$, daraus ergibt sich für die erste Hälfte der Längenfolge wie behauptet:

$$l_1 = 3$$

$$l_k = 2 \quad \text{für } 2 \leq k \leq 2p - 1.$$

Der Relator $R_{(\alpha, \beta')}$ besitzt also im Fall $p > 1$ und $l = 1$ die Form

$$R_{(\alpha, \beta')} = x_1 x_2 x_1 (x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1)^{p-1} x_2^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1} (x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1})^{p-1},$$

damit ist die Behauptung (2) bewiesen.

Die Zahlen α, β, β' des Falles (3) mit $p = 1, l > 1$ und $\alpha = 4l - 1, \beta = 2l - 1, \beta' = 4l - 3$ sind symmetrisch zu denen des vorigen Falles (2) mit $p > 1, l = 1$ und $\alpha = 4p - 1, \beta = 4p - 3$ und $\beta' = 2p - 1$.

□

Lemma 11

Seien $p, l \geq 1$ und $b(\alpha, \beta)$ ein Knoten der Klasse 2.2.

- (1) Seien $p, l > 1$ und j, q, x und y positive Zahlen mit $jq = p$ bzw. $xy = l$. Dann besitzt die Gruppe $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid K_{j,q}^{2,2} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{x,y}^{2,2} \rangle$, wobei

$$K_{j,q}^{2,2} := x_2^{-1} \left((x_2^q x_1 x_2^{-q} x_1^{-1})^l (x_2^q x_1^{-1} x_2^{-q} x_1)^l \right)^j$$

$$\tilde{K}_{x,y}^{2,2} := x_2^{-1} \left((x_2^y x_1 x_2^{-y} x_1^{-1})^p (x_2^y x_1^{-1} x_2^{-y} x_1)^p \right)^x$$

- (2) Seien $p > 1, l = 1$ und j, q positive Zahlen mit $jq = p$. Dann besitzt die Gruppe $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ eine Darstellung $\langle x_1, x_2 \mid K_{j,q}^{2,2} \rangle$, wobei

$$K_{j,q}^{2,2} = x_2^{-1} (x_2^q x_1 x_2^{-q} x_1^{-1} x_2^q x_1^{-1} x_2^{-q} x_1)^j$$

- (3) Seien $p = 1, l > 1$ und x, y positive Zahlen mit $xy = l$. Dann besitzt die Gruppe $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ eine Darstellung $\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{x,y}^{2,2} \rangle$, wobei

$$\tilde{K}_{x,y}^{2,2} = x_2^{-1} (x_2^y x_1 x_2^{-y} x_1^{-1} x_2^y x_1^{-1} x_2^{-y} x_1)^x$$

Beweis

Seien $p, l > 1$ und j, q positive Zahlen mit $jq = p$. Der erste Erzeugendenwechsel $y_2 = x_1 x_2^{-1}, y_1 = x_1$ überführt die Darstellung $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ in

$$\langle y_1, y_2 \mid y_2 (y_1^{-1} y_2^p y_1 y_2^{-p})^l (y_1 y_2^p y_1^{-1} y_2^{-p})^l \rangle$$

Der zweite Erzeugendenwechsel $z_2 = y_2^j$ führt auf die behauptete Darstellung

$$\langle y_1 y_2, z_2 = y_2^j, y_2 = (y_2^p y_1 y_2^{-p} y_1^{-1})^l (y_2^p y_1^{-1} y_2^{-p} y_1)^l \rangle$$

$$\cong \langle y_1 z_2 \mid z_2^{-1} \left((z_2^q y_1 z_2^{-q} y_1^{-1})^l (z_2^q y_1^{-1} z_2^{-q} y_1)^l \right)^j \rangle.$$

Sind x, y positive Zahlen mit $xy = l$, führen analog die Erzeugendenwechsel $y_2 = x_1 x_2^{-1}$, $y_1 = x_1$ und $z_2 = y_2^x$ von der Darstellung $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ auf

$$\langle y_1, z_2 \mid z_2^{-1} \left((z_2^y y_1 z_2^{-y} y_1^{-1})^p (z_2^y y_1^{-1} z_2^{-y} y_1)^p \right)^x \rangle.$$

Sei jetzt $p > 1$ und $l = 1$. Dann führen wie oben die beiden Erzeugendenwechsel $y_2 = x_1 x_2^{-1}$, $y_1 = x_1$ und $z_2 = y_2^j$ von $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ auf

$$\langle y_1, z_2 \mid z_2^{-1} (z_2^q y_1 z_2^{-q} y_1^{-1} z_2^q y_1^{-1} z_2^{-q} y_1)^j \rangle.$$

Im letzten Fall, wo $p = 1$ und $l > 1$ sind, folgt die behauptete Darstellung nach einer analogen Rechnung aus der Darstellung $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$.

□

2.4.2 N -Äquivalenzklassen der Gruppendarstellungen

Lemma 12

- (1) Seien $p > 1$, $l \geq 1$ und j_1, q_1, j_2 und q_2 positive Zahlen mit $j_1 q_1 = j_2 q_2 = p$. Dann sind die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid K_{j_1, q_1}^{2,2} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid K_{j_2, q_2}^{2,2} \rangle$ nicht N -äquivalent, falls $j_1 \neq j_2$ ist.
- (2) Seien $p, l > 1$ und j, q, x und y positive Zahlen mit $jq = p$ und $xy = l$. Dann sind die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid K_{j, q}^{2,2} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{x, y}^{2,2} \rangle$ nicht N -äquivalent, falls $p \neq l$ ist.
- (3) Seien $p > 1$, $l = 1$ und j, q positive Zahlen mit $jq = p$. Dann sind die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid K_{j, q}^{2,2} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ nicht N -äquivalent.

Beweis

Der Übergang $x_2 \rightarrow x_1^{-1}$, $x_1 \rightarrow x_2$ bringt die Relatoren $K_{j,q}^{2,2}$ und $\tilde{K}_{x,y}^{2,2}$ auf eine für das Lemma aus [B], vgl. Abschnitt 2.3.2, günstigere Form:

$$R_{j,q}^{2,2} := x_1 \left((x_1^{-q} x_2 x_1^q x_2^{-1})^l (x_1^{-q} x_2^{-1} x_1^q x_2)^l \right)^j$$

$$\tilde{R}_{x,y}^{2,2} := x_1 \left((x_1^{-y} x_2 x_1^y x_2^{-1})^p (x_1^{-y} x_2^{-1} x_1^y x_2)^p \right)^x$$

Zum Beweis von (1): Angenommen, es gäbe zwei Zahlenpaare j_1, q_1 und j_2, q_2 mit $j_1 q_1 = j_2 q_2 = p$, so daß die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{j_1, q_1}^{2,2} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{j_2, q_2}^{2,2} \rangle$ N -äquivalent sind. Nach dem Lemma aus [B] müßten dann die beiden Wörter

$$x_1 \left((x_1^{-q_1} x_2 x_1^{q_1} x_2^{-1})^l (x_1^{-q_1} x_2^{-1} x_1^{q_1} x_2)^l \right)^{j_1}$$

und

$$\left(x_1^\varepsilon (x_1^c (x_1^{-\varepsilon q_2} x_2^{\varepsilon'} x_1^{\varepsilon q_2} x_2^{-\varepsilon'})^l x_1^{-c} (x_1^{-\varepsilon q_2} x_2^{-\varepsilon'} x_1^{\varepsilon q_2} x_2^{\varepsilon'})^l)^{j_2} \right)^{\pm 1}$$

in $\langle x_1, x_2 \mid \rangle$ mit einem $c \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm 1\}$ zueinander konjugiert sein. Das ist für $j_1 \neq j_2$ nicht möglich, denn wären sie in $\langle x_1, x_2 \mid \rangle$ zueinander konjugiert, müßten nach zyklischem Kürzen beider Wörter das eine Wort eine zyklische Permutation des anderen Wortes sein, vgl. [LS, Prop. 2.14]. Die Erzeugende x_2 tritt aber nach zyklischem Kürzen im ersten Wort $4lj_1$ -mal auf und im zweiten Wort $4lj_2$ -mal.

Analog läßt sich der Beweis von (2) führen. Seien j, q, x und y Zahlen, so daß $jq = p$ und $xy = l$ ist. Wären die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{j,q}^{2,2} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid \tilde{R}_{x,y}^{2,2} \rangle$ N -äquivalent, so müßten in $\langle x_1, x_2 \mid \rangle$ die beiden Wörter

$$x_1 \left((x_1^{-q} x_2 x_1^q x_2^{-1})^l (x_1^{-q} x_2^{-1} x_1^q x_2)^l \right)^j$$

und

$$\left(x_1^\varepsilon (x_1^c (x_1^{-\varepsilon y} x_2^{\varepsilon'} x_1^{\varepsilon y} x_2^{-\varepsilon'})^p x_1^{-c} (x_1^{-\varepsilon y} x_2^{-\varepsilon'} x_1^{\varepsilon y} x_2^{\varepsilon'})^p)^x \right)^{\pm 1}$$

konjugiert sind. Aber nach zyklischem Kürzen gibt es, falls $p \neq l$ ist, kein $\varepsilon' \in \{\pm 1\}$, so daß in den beiden Wörtern die Folge der Exponenten von x_2 zyklisch gleich ist.

Zum Beweis von (3) seien jetzt $p > 1$, $l = 1$ und j, q positive Zahlen mit $jq = p$. Der Übergang $x_1 \rightarrow x_1 x_2$, $x_2 \rightarrow x_2$ bringt $R_{(\alpha, \beta')}$ auf die Form

$$R := x_1(x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1})^p(x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2)^p.$$

Angenommen, die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid K_{j,q}^{2,2} \rangle$ sind N -äquivalent. Dann gibt es eine Zahl $c \in \mathbb{Z}$ und Zahlen $\varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm 1\}$, so daß die beiden Wörter

$$x_1(x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1})^p(x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2)^p$$

und

$$\left(x_1^{\varepsilon}(x_1^{c-\varepsilon q}x_2^{\varepsilon'}x_1^{\varepsilon q}x_2^{-\varepsilon'}x_1^{-c-\varepsilon q}x_2^{-\varepsilon'}x_1^{\varepsilon q}x_2^{\varepsilon'})^j\right)^{\pm 1}$$

in $\langle x_1, x_2 \mid \rangle$ zueinander konjugiert sind. Für $p > 1$ ist die Aufeinanderfolge der Exponenten von x_2 aber für keine Zahl $c \in \mathbb{Z}$ oder $\varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm 1\}$ zyklisch gleich. □

Dieses Lemma erlaubt die Einteilung der Gruppendarstellungen in N -Äquivalenzklassen:

Satz 4

Seien $p, l \geq 1$, aber nicht gleichzeitig 1 und sei $b(\alpha, \beta)$ ein Knoten der Klasse 2.2. Sei t_1 die Anzahl der Teiler von p einschließlich 1 und p , t_2 sei die Anzahl der Teiler von l einschließlich 1 und l . Dann gilt:

- (1) Falls $p, l > 1$ und $p \neq l$ ist, besitzt die Gruppe $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ mindestens $t_1 + t_2$ Darstellungen, die nicht N -äquivalent sind, also mindestens vier N -Äquivalenzklassen.
- (2) Falls $p, l > 1$ und $p = l$ ist, besitzt die Gruppe $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ mindestens t_1 Darstellungen, die nicht N -äquivalent sind, also mindestens zwei N -Äquivalenzklassen.
- (3) Falls $p > 1$ und $l = 1$ oder $p = 1$ und $l > 1$ ist, besitzt die Gruppe $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ mindestens $t_1 + 1$ bzw. $t_2 + 1$ Darstellungen, die nicht N -äquivalent sind, also mindestens drei N -Äquivalenzklassen.

Für $p = l$ erhält man einen 2-Brückenknoten $b(\alpha, \beta)$ mit $\beta' = \beta$. Aus (2) von Satz 4 folgt insbesondere:

Bemerkung: Sei n eine beliebige natürliche Zahl. Dann gibt es unendlich viele 2-Brückenknoten $b(\alpha, \beta)$ mit $\beta' = \beta$, deren Gruppe mindestens n nicht N -äquivalente Darstellungen mit zwei Erzeugenden und einer definierenden Relation besitzt.

Es gibt 2-Brückenknoten $b(\alpha, \beta)$ mit $\beta' = \beta$, die nicht in der Klasse 2.2 enthalten sind.

Einige Beispiele für Knoten der Klasse 2.2 (t_1 ist wieder die Anzahl der Teiler von p einschließlich 1 und p und t_2 ist die Anzahl der Teiler von l einschließlich 1 und l):

	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
$l = 1$	$b(3, 1) =$ $b(3, 1)$	$b(7, 5) =$ $b(7, 3)$ $t_1 + 1 = 3$	$b(11, 9) =$ $b(11, 5)$ $t_1 + 1 = 3$	$b(15, 13) =$ $b(15, 7)$ $t_1 + 1 = 4$	$b(19, 17) =$ $b(19, 9)$ $t_1 + 1 = 3$
$l = 2$	$b(7, 3) =$ $b(7, 5)$ $t_2 + 1 = 3$	$b(15, 11) =$ $b(15, 11)$ $t_1 = 2$	$b(23, 19) =$ $b(23, 17)$ $t_1 + t_2 = 4$	$b(31, 27) =$ $b(31, 23)$ $t_1 + t_2 = 5$	$b(39, 35) =$ $b(39, 29)$ $t_1 + t_2 = 4$
$l = 3$	$b(11, 5) =$ $b(11, 9)$ $t_1 + 1 = 3$	$b(23, 17) =$ $b(23, 19)$ $t_1 + t_2 = 4$	$b(35, 29) =$ $b(35, 29)$ $t_1 = 2$	$b(47, 41) =$ $b(47, 39)$ $t_1 + t_2 = 5$	$b(59, 53) =$ $b(59, 49)$ $t_1 + t_2 = 4$
$l = 4$	$b(15, 7) =$ $b(15, 13)$ $t_2 + 1 = 4$	$b(31, 23) =$ $b(31, 27)$ $t_1 + t_2 = 5$	$b(47, 39) =$ $b(47, 41)$ $t_1 + t_2 = 5$	$b(63, 55) =$ $b(63, 55)$ $t_1 = 3$	$b(79, 71) =$ $b(79, 69)$ $t_1 + t_2 = 5$

2.5 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt sollen noch einmal kurz die Ergebnisse der vorigen Abschnitte zusammengefaßt werden.

(1) Knoten der Klasse 1.1

Sei $(\alpha, \beta) = (p|\sigma| - 1, \frac{\sigma}{2})$ mit $\frac{\sigma}{2} \in \mathbb{Z}$ ungerade, $|\sigma| > 2$ und $p > 1$. Seien $j_1, \dots, j_t$ die verschiedenen Teiler von p einschließlich 1 und p . Dann sind die Gruppendarstellungen

$$\langle x_1, x_2 \mid K_{j_1, q_1}^{1.1} \rangle, \langle x_1, x_2 \mid K_{j_2, q_2}^{1.1} \rangle, \dots, \langle x_1, x_2 \mid K_{j_t, q_t}^{1.1} \rangle$$

und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$

nicht N -äquivalent.

(2) Knoten der Klasse 1.2

Sei $(\alpha, \beta) = (p|\sigma| + 1, \frac{\sigma}{2})$ mit $\frac{\sigma}{2} \in \mathbb{Z}$ ungerade, $|\sigma| > 2$ und $p > 1$. Seien $j_1, \dots, j_t$ die verschiedenen Teiler von p einschließlich 1 und p . Dann sind die Gruppendarstellungen

$$\langle x_1, x_2 \mid K_{j_1, q_1}^{1.2} \rangle, \langle x_1, x_2 \mid K_{j_2, q_2}^{1.2} \rangle, \dots, \langle x_1, x_2 \mid K_{j_t, q_t}^{1.2} \rangle$$

und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$

nicht N -äquivalent.

(3) Knoten der Klasse 2.1

Sei $(\alpha, \beta) = (p\sigma + 1, \alpha - \frac{\sigma}{2})$ mit $\frac{\sigma}{2} = 2l \geq 2$ gerade und $p \geq 1$. Seien $j_1, \dots, j_{t_1}$ die verschiedenen Teiler von p einschließlich 1 und p und $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{t_2}$ die verschiedenen Teiler von l einschließlich 1 und l . Dann gilt:

(i) Falls $p, l > 1$ und $p \neq l$ ist, sind die Gruppendarstellungen

$$\langle x_1, x_2 \mid K_{j_1, q_1}^{2.1} \rangle, \dots, \langle x_1, x_2 \mid K_{j_{t_1}, q_{t_1}}^{2.1} \rangle,$$

$$\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{\tilde{x}_1, \tilde{q}_1}^{2.1} \rangle, \dots, \langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{\tilde{x}_{t_2}, \tilde{q}_{t_2}}^{2.1} \rangle$$

nicht N -äquivalent.

(ii) Falls $p, l > 1$ und $p = l$ ist, sind die Gruppendarstellungen

$$\langle x_1, x_2 \mid K_{j_1, q_1}^{2.1} \rangle, \langle x_1, x_2 \mid K_{j_2, q_2}^{2.1} \rangle, \dots, \langle x_1, x_2 \mid K_{j_{t_1}, q_{t_1}}^{2.1} \rangle$$

nicht N -äquivalent.

- (iii) Falls $p > 1$ und $l = 1$ oder $p = 1$ und $l > 1$ ist, sind die Gruppendarstellungen

$$\langle x_1, x_2 \mid K_{j_1, q_1}^{2.1} \rangle, \dots, \langle x_1, x_2 \mid K_{j_{t_1}, q_{t_1}}^{2.1} \rangle$$

$$\text{und } \langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$$

bzw.

$$\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{\tilde{x}_1, \tilde{y}_1}^{2.1} \rangle, \dots, \langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{\tilde{x}_{t_2}, \tilde{y}_{t_2}}^{2.1} \rangle$$

$$\text{und } \langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$$

nicht N -äquivalent.

(4) Knoten der Klasse 2.2

Sei $(\alpha, \beta) = (p\sigma - 1, \alpha - \frac{\sigma}{2})$ und $\frac{\sigma}{2} = 2l \geq 2$ gerade und $p \geq 1$, p und l seien nicht gleichzeitig gleich 1. Seien $j_1, \dots, j_{t_1}$ die verschiedenen Teiler von p einschließlich 1 und p und $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{t_2}$ die verschiedenen Teiler von l einschließlich 1 und l . Dann gilt:

- (i) Falls $p, l > 1$ und $p \neq l$ ist, sind die Gruppendarstellungen

$$\langle x_1, x_2 \mid K_{j_1, q_1}^{2.2} \rangle, \dots, \langle x_1, x_2 \mid K_{j_{t_1}, q_{t_1}}^{2.2} \rangle,$$

$$\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{\tilde{x}_1, \tilde{y}_1}^{2.2} \rangle, \dots, \langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{\tilde{x}_{t_2}, \tilde{y}_{t_2}}^{2.2} \rangle$$

nicht N -äquivalent.

- (ii) Falls $p, l > 1$ und $p = l$ ist, sind die Gruppendarstellungen

$$\langle x_1, x_2 \mid K_{j_1, q_1}^{2.2} \rangle, \langle x_1, x_2 \mid K_{j_2, q_2}^{2.2} \rangle, \dots, \langle x_1, x_2 \mid K_{j_{t_1}, q_{t_1}}^{2.2} \rangle$$

nicht N -äquivalent.

(iii) Falls $p > 1$ und $l = 1$ oder $p = 1$ und $l > 1$ ist, sind die Gruppendarstellungen

$$\langle x_1, x_2 \mid K_{j_1, q_1}^{2,2} \rangle, \dots, \langle x_1, x_2 \mid K_{j_{t_1}, q_{t_1}}^{2,2} \rangle$$

und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$

bzw.

$$\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{\tilde{j}_1, \tilde{y}_1}^{2,2} \rangle, \dots, \langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{\tilde{j}_{t_2}, \tilde{y}_{t_2}}^{2,2} \rangle$$

und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$

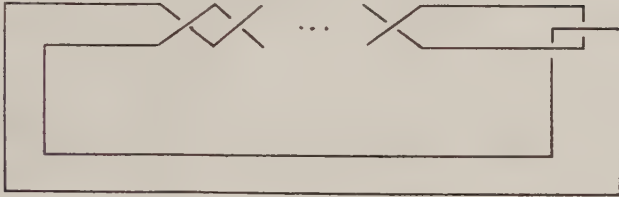
nicht N -äquivalent.

2.6 Die Knoten der Klassen 1.1, 1.2, 2.1 und 2.2

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß die Klassen 2.1 und 2.2 bis auf den trivialen Knoten und Kleeblattschlinge, die ein Torusknoten ist, alle Twistknoten enthalten. Ferner lassen sich die 2-Brückenknoten der Klassen 1.1, 1.2, 2.1 und 2.2 als Brezelknoten des Typs $K(r, s, \pm 1)$ interpretieren und darüberhinaus besteht die Menge der Brezelknoten des Typs $K(r, s, \pm 1)$ bis auf den trivialen Knoten und die Torusknoten $b(p, \pm 1)$ mit $p \geq 3$ ungerade genau aus den Knoten der vier Klassen von 2-Brückenknoten. Abschließend soll eine Vorstellung über die „Größe“ und „Verteilung“ der Knoten der vier Klassen in der Menge aller 2-Brückenknoten vermittelt werden.

2.6.1 Twistknoten

Ein *Twistknoten* δ_n (mit $n \in \mathbb{Z}$) ist ein Knoten der Form



$n \in \mathbb{Z}$ ist die Anzahl der Verdrillungen



Beispielsweise ist $\delta_2 = \delta_{-3}$ der Viererknoten $b(5, 3) = b(5, -3)$, δ_{-1} ist der triviale Knoten und δ_1 ist die Kleeblattschlinge. Jeder Twistknoten ist ein 2-Brückenknoten, genauer gilt:

Lemma 13

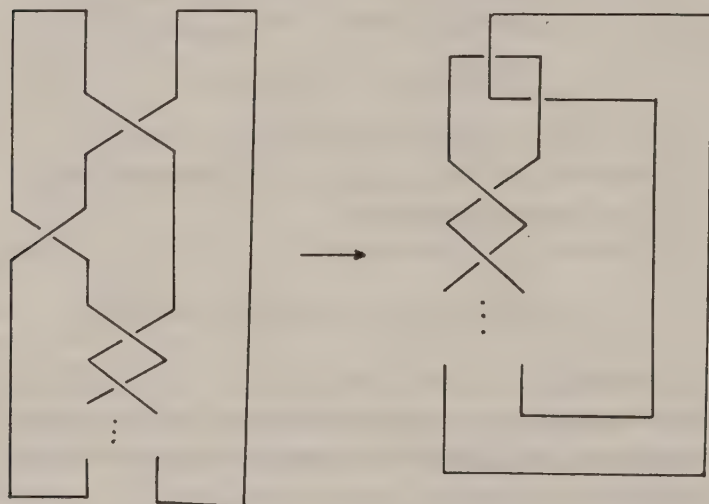
- (1) Für $n > 0$ ist $\delta_n = b(2n + 1, 1 - 2n)$.
- (2) Für $n < -1$ ist $\delta_n = b(-2n - 1, -2n - 3)$.

Beweis

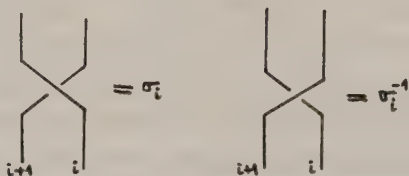
Die Aussage (2) folgt aus der Aussage (1), weil für gespiegelte 2-Brückenknoten bzw. gespiegelte Twistknoten gilt:

$$(b(\alpha, \beta))^* = b(\alpha, -\beta) \text{ bzw. } (\delta_n)^* = \delta_{-n-1}.$$

Die Aussage (1) folgt über die Darstellung von 2-Brückenknoten als Viergeflechte (vgl. [BuZ, Chap. 12B]). Zunächst ist der geschlossene Zopf $z = \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^n$ der Twistknoten δ_n :



wobei



Andererseits besitzt der 2-Brückenknoten $b(\alpha, \beta)$ mit $\alpha = 2n+1, \beta = n+1, n > 0$ wegen

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{n}}} = [1, 1, n]$$

eine Darstellung als Viergeflechte mit definierendem Zopf $z = \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^n$. Es gilt also $\delta_n = b(2n+1, n+1)$. Für ungerades n ist $(2n+1, n+1)$ keine Normalform, aber es ist $b(2n+1, n+1) = b(2n+1, 1-2n)$, denn

$(n+1)(1-2n) \equiv 1 \pmod{2n+1}$, vgl. [BuZ, pp. 184—185]. $(2n+1, 1-2n)$ ist eine Normalform, also folgt schließlich

$$\delta_n = b(2n+1, 1-2n) \quad \text{für } n > 0.$$

□

Die Klasse 2.1 ist die Menge aller 2-Brückenknoten $b(\alpha, \beta) = b(\alpha, \beta')$ mit einer Normalform

$$(\alpha, \beta) = (4pl+1, 4pl+1-2l)$$

$$\beta' = -4pl-1+2p$$

wobei $p, l \geq 1$ sind. Die Klasse 2.2 ist die Menge aller 2-Bündchenknoten $b(\alpha, \beta)$ mit einer Normalform (α, β) oder $(\alpha, -\beta)$ mit

$$(\alpha, \beta) = (4lp-1, 4lp-1-2l)$$

$$\beta' = 4lp-1-2p$$

wobei $p, l \geq 1$ sind und nicht gleichzeitig gleich 1.

Bemerkung

(1) Sei $b(\alpha, \beta) = b(\alpha, \beta')$ ein Knoten der Klasse 2.1 mit $p = 1$ oder $l = 1$.

Dann ist

(i) im Fall $p = 1$:

$$b(4l+1, 2l+1) = b(4l+1, 1-4l) = \delta_{2l}$$

und

(ii) im Fall $l = 1$:

$$b(4p+1, 4p-1) = b(4p+1, -1-2p) = \delta_{-2p-1}$$

(2) Sei $b(\alpha, \beta) = b(\alpha, \beta')$ ein Knoten der Klasse 2.2 mit $p = 1$ oder $l = 1$.

Dann ist

(i) im Fall $p = 1$:

$$b(4l - 1, 2l - 1) = b(4l - 1, 4l - 3) = \delta_{-2l}$$

$$b(4l - 1, -2l + 1) = b(4l - 1, -4l + 3) = \delta_{2l-1}$$

und

(ii) im Fall $l = 1$:

$$b(4p - 1, 4p - 3) = b(4p - 1, 2p - 1) = \delta_{-2p}$$

$$b(4p - 1, -4p + 3) = b(4p - 1, -2p + 1) = \delta_{2p-1}$$

(3) Die Klassen 2.1 und 2.2 enthalten bis auf den trivialen Knoten und die Kleeblattschlinge alle Twistknoten.

Der Beweis dieser Bemerkung ergibt sich aus Lemma 13. Aus den Sätzen 3 und 4 (vgl. Abschnitt 2.3.2 bzw. 2.4.2) über die N -Äquivalenzklassen der Knotengruppen folgt für die Twistknoten:

Satz 5

Sei $n = 2m$ oder $n = 2m - 1$, aber $n \notin \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$, d.h. δ_n ist nicht der triviale Knoten, der Viererknoten und nicht die Kleeblattschlinge. Sei t die Anzahl der Teiler von m einschließlich 1 und m selbst. Dann besitzt die Gruppe des Twistknotens δ_n mindestens $t + 1$ Darstellungen mit zwei Erzeugenden und einer definierenden Relation, die nicht N -äquivalent sind.

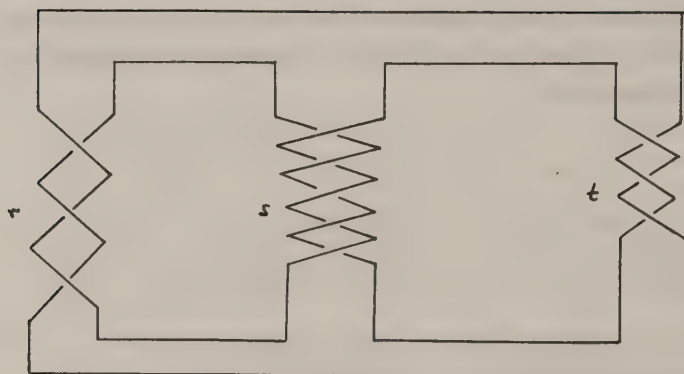
Einige Beispiele (t ist die Anzahl der Teiler von m einschließlich 1 und m , wobei $n = 2m$ bzw. $n = 2m - 1$ die den Twistknoten δ_n kennzeichnende Verdrillungszahl ist):

Klasse 2.1	$t + 1$	Klasse 2.2	$t + 1$
$b(5, 3) = b(5, -3) = \delta_2$	—	$b(7, 3) = b(7, 5) = \delta_{-4}$	3
$b(9, 5) = b(9, -7) = \delta_4$	3	$b(11, 5) = b(11, 9) = \delta_{-6}$	3
$b(13, 7) = b(13, -11) = \delta_6$	3	$b(15, 7) = b(15, 13) = \delta_{-8}$	4
$b(17, 9) = b(17, -15) = \delta_8$	4	$b(19, 9) = b(19, 17) = \delta_{-10}$	3
⋮		⋮	
$b(5, -3) = b(5, 3) = \delta_{-3}$	—	$b(7, -3) = b(7, -5) = \delta_3$	3
$b(9, -5) = b(9, 7) = \delta_{-5}$	3	$b(11, -5) = b(11, -9) = \delta_5$	3
$b(13, -7) = b(13, 11) = \delta_{-7}$	3	$b(15, -7) = b(15, -13) = \delta_7$	4
$b(17, -9) = b(17, 15) = \delta_{-9}$	4	$b(19, -9) = b(19, -17) = \delta_9$	3
⋮		⋮	

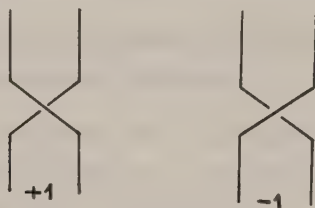
2.6.2 Brezelknoten

In diesem Kapitel wird gezeigt, daß sich die 2-Brückenknoten der vier Klassen als Brezelknoten des Typs $K(r, s, \pm 1)$ interpretieren lassen und daß andererseits die Menge der Brezelknoten des Typs $K(r, s, \pm 1)$ bis auf den trivialen Knoten und die Torusknoten $b(p, \pm 1)$ mit $p \geq 3$ ungerade genau aus den Knoten der vier Klassen von 2-Brückenknoten besteht.

Ein *Brezelknoten* $K(r, s, t)$ mit ungeraden Zahlen r, s, t oder eine der Zahlen sei gerade und die anderen beiden ungerade, ist ein Knoten der folgenden Form:



die Zahlen $r, s, t \in \mathbb{Z}$ geben die Richtung und Anzahl der Verdrillungen an:



Die im folgenden Lemma angegebenen Darstellungen von Brezelknoten $K(r, s, -1)$ als 4-Geflecht werden zum Nachweis benutzt, daß die 2-Brückenknoten der Klassen 1.1, 1.2, 2.1 und 2.2 Brezelknoten des Typs $K(r, s, \pm 1)$ sind.

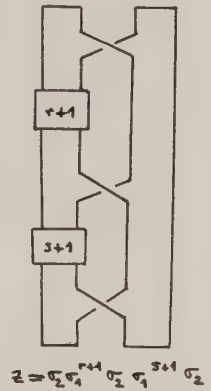
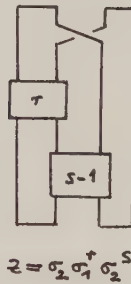
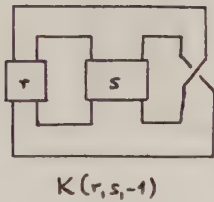
Lemma

- (1) Der Brezelknoten $K(r, s, -1)$ besitzt eine Darstellung als 4-Geflecht mit definierendem Zopf

$$z = \sigma_2 \sigma_1^r \sigma_2^{s-1}.$$

- (2) Der Brezelknoten $K(r, s, -1)$ besitzt eine Darstellung als 4-Geflecht mit definierendem Zopf

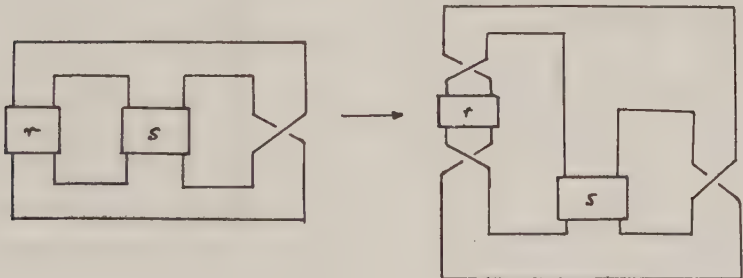
$$z = \sigma_2 \sigma_1^{r+1} \sigma_2 \sigma_2^{s+1} \sigma_2.$$

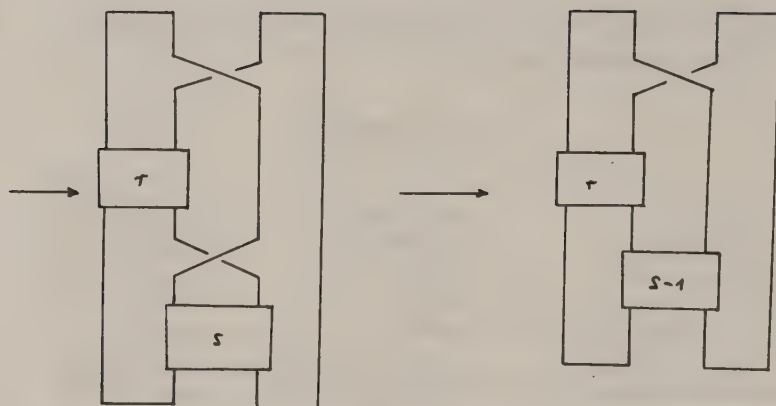


Der Block  entspricht einem q -fach verdrehten Strang.

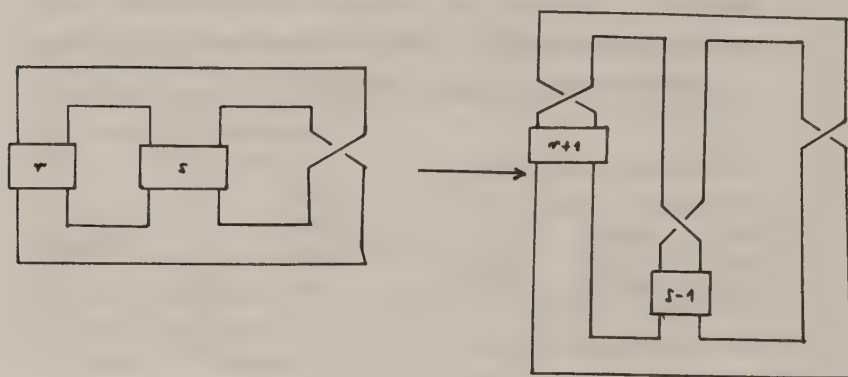
Beweis

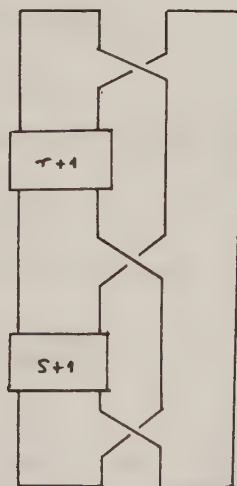
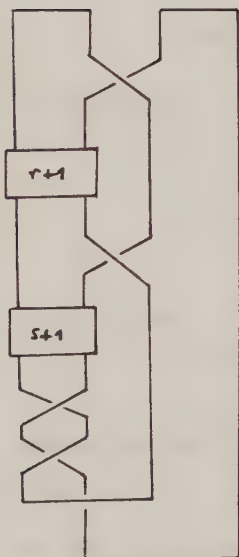
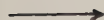
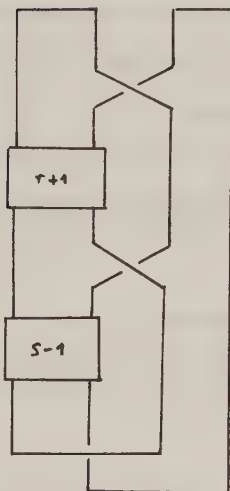
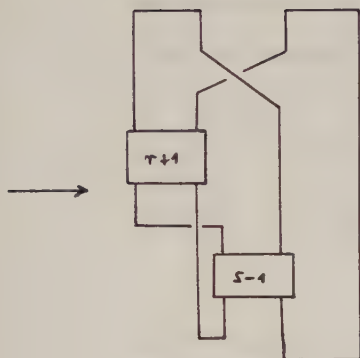
- (1) Der Brezelknoten $K(r, s, -1)$ läßt sich folgendermaßen in die 4-Geflechtdarstellung $z = \sigma_2 \sigma_1^r \sigma_2^{s-1}$ überführen:





- (2) Andererseits besitzt der Brezelknoten $K(r, s, -1)$ auch die 4-Geflecht-darstellung $z = \sigma_2 \sigma_1^{r+1} \sigma_2 \sigma_1^{s+1} \sigma_2$:





In der Definition der Brezelknoten $K(r, s, t)$ wird i.a. vorausgesetzt, daß alle drei Zahlen r, s und t ungerade sind. $K(r, s, t)$ stellt darüber hinaus noch einen Knoten dar, wenn r gerade und s, t ungerade sind. In diesem Sinne lassen sich die 2-Brückenknoten der Klassen 1.1 und 1.2 als Brezelknoten interpretieren:

Lemma

(1) Sei $b(\alpha, \beta)$ ein Knoten der Klasse 1.1 mit

$$(\alpha, \beta) = (p|\sigma| - 1, \frac{\sigma}{2}),$$

d.h. $p > 1$, $\frac{\sigma}{2} \in \mathbb{Z}$ ungerade und $|\frac{\sigma}{2}| > 1$. Dann ist

$$b(\alpha, \beta) = \begin{cases} K(\frac{\sigma}{2} - 1, 2p - 1, 1), & \frac{\sigma}{2} > 0 \\ K(-|\frac{\sigma}{2}| + 1, -2p + 1, -1), & \frac{\sigma}{2} < 0. \end{cases}$$

(2) Sei $b(\alpha, \beta)$ ein Knoten der Klasse 1.2 mit

$$(\alpha, \beta) = (p|\sigma| + 1, \frac{\sigma}{2}),$$

d.h. $p > 1$, $\frac{\sigma}{2} \in \mathbb{Z}$ ungerade und $|\frac{\sigma}{2}| > 1$. Dann ist

$$b(\alpha, \beta) = \begin{cases} K(-\frac{\sigma}{2} + 1, 2p + 1, -1), & \frac{\sigma}{2} > 0 \\ K(|\frac{\sigma}{2}| - 1, -2p - 1, 1), & \frac{\sigma}{2} < 0. \end{cases}$$

Beweis

Zum Beweis von (1) sei zunächst $\frac{\sigma}{2} > 0$, dann ist $-\beta' = 2p(\frac{\sigma}{2} - 1) - 1 > 0$

und wegen

$$\begin{aligned} 2p\left(\frac{\sigma}{2}\right) - 1 &= 1 \cdot (2p\left(\frac{\sigma}{2} - 1\right) - 1) + 2p \\ 2p\left(\frac{\sigma}{2} - 1\right) - 1 &= \left(\frac{\sigma}{2} - 2\right)2p + 2p - 1 \\ 2p &= 1 \cdot (2p - 1) + 1 \\ 2p - 1 &= (2p - 1) \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

besitzt $b(\alpha, -\beta')$ die Darstellung als 4-Geflecht mit definierendem Zopf

$$z = \sigma_2 \sigma_1^{-\frac{\sigma}{2}+2} \sigma_2 \sigma_1^{-2p+2} \sigma_2$$

nach der Augmentation $[1, \frac{\sigma}{2} - 2, 1, 2p - 1] = [1, \frac{\sigma}{2} - 2, 1, 2p - 2, 1]$, vgl. [BuZ, p. 187] und [BuZ, Prop. 12.13]. Aus dem vorigen Lemma folgt $b(\alpha, \beta') = K(-\frac{\sigma}{2} + 1, -2p + 1, -1)$ und damit

$$b(\alpha, \beta') = b(\alpha, \beta) = K\left(\frac{\sigma}{2} - 1, 2p - 1, 1\right).$$

Zum Beweis von (2) sei $\frac{\sigma}{2} > 0$, dann besitzt $b(\alpha, \beta')$ wegen

$$\begin{aligned} 2p\left(\frac{\sigma}{2}\right) + 1 &= 1 \cdot (2p\left(\frac{\sigma}{2} - 1\right) + 1) + 2p \\ 2p\left(\frac{\sigma}{2} - 1\right) + 1 &= \left(\frac{\sigma}{2} - 1\right) \cdot 2p + 1 \\ 2p &= 2p \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

die Darstellung als 4-Geflecht mit definierendem Zopf

$$z = \sigma_2 \sigma_1^{-\frac{\sigma}{2}+1} \sigma_2^{2p}$$

und aus dem vorigen Lemma ergibt sich die Behauptung. □

Die 2-Brückenknoten der Klassen 2.1 und 2.2 lassen sich auch als Brezelknoten $K(r, s, \pm 1)$ interpretieren; hier sind die Zahlen r und s beide ungerade, außer im Fall eines 2-Brückenknotens der Klasse 2.2 mit $p = 1$.

Lemma

(1) Sei $b(\alpha, \beta)$ ein Knoten der Klasse 2.1 mit

$$(\alpha, \beta) = (p\sigma + 1, \alpha - \frac{\sigma}{2}),$$

d.h. $p \geq 1, \frac{\sigma}{2} \geq 2$ gerade. Dann ist

$$b(\alpha, \beta) = K(-2p + 1, \frac{\sigma}{2} + 1, -1).$$

(2) Sei $b(\alpha, \beta)$ ein Knoten der Klasse 2.2 mit

$$(\alpha, \beta) = (p\sigma - 1, \alpha - \frac{\sigma}{2})$$

bzw.

$$(\alpha, \beta) = (p\sigma - 1, -\alpha + \frac{\sigma}{2}),$$

d.h. $p \geq 1, \frac{\sigma}{2} \geq 2$ gerade und $(p, \frac{\sigma}{2}) \neq (1, 2)$. Dann ist

$$b(\alpha, \beta) = \begin{cases} K(-2p + 1, -\frac{\sigma}{2} + 1, -1) & \beta > 0, p > 1 \\ K(-\frac{\sigma}{2} + 2, 3, -1) & \beta > 0, p = 1 \\ K(2p - 1, \frac{\sigma}{2} - 1, 1) & \beta < 0, p > 1 \\ K(\frac{\sigma}{2} - 2, -3, 1) & \beta < 0, p = 1 \end{cases}$$

Beweis

Wegen

$$\begin{aligned} 2p\frac{\sigma}{2} + 1 &= 1 \cdot (2p\frac{\sigma}{2} + 1 - \frac{\sigma}{2}) + \frac{\sigma}{2} \\ 2p\frac{\sigma}{2} + 1 - \frac{\sigma}{2} &= (2p - 1)\frac{\sigma}{2} + 1 \\ \frac{\sigma}{2} &= \frac{\sigma}{2} \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

besitzt $b(\alpha, \beta)$ die Darstellung

$$z = \sigma_2 \sigma_1^{-2p+1} \sigma_2^{\frac{\sigma}{2}}$$

als 4-Geflecht und aus dem Lemma oben folgt:

$$b(\alpha, \beta) = K(-2p + 1, \frac{\sigma}{2} + 1, -1).$$

Zum Beweis von (2) sei $(\alpha, \beta) = (p\sigma - 1, p\sigma - 1 - \frac{\sigma}{2})$ und zunächst $p > 1$.
Dann folgt aus

$$\begin{aligned} 2p\frac{\sigma}{2} - 1 &= 1 \cdot (2p\frac{\sigma}{2} - 1 - \frac{\sigma}{2}) + \frac{\sigma}{2} \\ (2p - 1)\frac{\sigma}{2} - 1 &= (2p - 2)\frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} - 1 \\ \frac{\sigma}{2} &= 1 \cdot (\frac{\sigma}{2} - 1) + 1 \\ \frac{\sigma}{2} - 1 &= (\frac{\sigma}{2} - 1) \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

die Darstellung

$$b(\alpha, \beta) = K(-2p + 1, -\frac{\sigma}{2} + 1, -1),$$

denn $[1, 2p - 2, 1, \frac{\sigma}{2} - 1] = [1, 2p - 2, 1, \frac{\sigma}{2} - 2, 1]$. Im Fall $p = 1$ ist $(\alpha, \beta') = (\sigma - 1, \sigma - 3)$, also

$$\begin{aligned} \sigma - 1 &= 1 \cdot (\sigma - 3) + 2 \\ \sigma - 3 &= (\frac{\sigma}{2} - 2)2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

und das 4-Geflecht mit definierendem Zopf

$$z = \sigma_2 \sigma_1^{-\frac{\sigma}{2} + 2} \sigma_2^2$$

entspricht $K(-\frac{\sigma}{2} + 2, 3, -1)$.

□

Umgekehrt besteht die Menge der Brezelknoten des Typs $K(r, s, \pm 1)$ bis auf den trivialen Knoten und die Torusknoten $b(p, \pm 1)$ mit $p \geq 3$ ungerade

genau aus den Knoten der vier Klassen von 2-Brückenknoten. Genauer gilt:

Satz

- (1) Die Menge der Brezelknoten des Typs $K(r, s, \pm 1)$ mit $r \in \mathbb{Z}$ gerade und $s \in \mathbb{Z}$ ungerade besteht aus
 - (i) den Knoten der Klasse 1.1,
 - (ii) den Knoten der Klasse 1.2,
 - (iii) den Twistknoten δ_n mit $n \in \mathbb{Z}$,
 - (iv) den Torusknoten $b(p, \pm 1)$ mit $p \geq 3$ ungerade und
 - (v) dem trivialen Knoten.

- (2) Die Menge der Brezelknoten des Typs $K(r, s, \pm 1)$ mit $r, s \in \mathbb{Z}$ ungerade besteht aus
 - (i) den Knoten der Klasse 2.1 ohne die Twistknoten,
 - (ii) den Knoten der Klasse 2.2 ohne die Twistknoten,
 - (iii) der Kleeblattschlinge $b(3, \pm 1)$ und
 - (iv) dem trivialen Knoten.

Die Menge der Brezelknoten des Typs $K(r, s, \pm 1)$, r und s seien beide ungerade oder r sei gerade und s ungerade, besteht aus:

- (i) dem Knoten der Klassen 1.1, 1.2, 2.1 und 2.2,
- (ii) den Torusknoten $b(p, \pm 1)$ mit $p \geq 3$ ungerade und
- (iii) dem trivialen Knoten.

Der Rest dieses Abschnittes dient dem Beweis des oben formulierten Satzes.

Beweis

- (1) Sei also $K(r, s, \pm 1)$ ein Brezelknoten mit $r \in \mathbb{Z}$ gerade und $s \in \mathbb{Z}$ ungerade. Für die Vorzeichen von r , s und ± 1 gibt es bis auf Spiegelung des Knotens die folgenden Möglichkeiten:

$$(i) \quad r \geq 0, s \geq 1, +1$$

$$(ii) \quad r \geq 0, s \geq 1, -1$$

$$(iii) \quad r \geq 0, s \leq -1, 1$$

$$(iv) \quad r < 0, s \geq 1, 1$$

Da die vier Klassen von 2-Brückenknoten jeweils auch die gespiegelten Knoten enthalten, bleiben jetzt nacheinander die Fälle (i) — (iv) zu betrachten.

Fall (i): Von den Knoten des Typs $K(r, s, 1)$ mit $r \geq 0$ gerade und $s \geq 1$ ungerade enthält die Klasse 1.1 die Knoten $K(r, s, 1)$ mit $r \geq 2$ gerade und $s \geq 3$ ungerade. $K(r, 1, 1)$ mit $r \geq 0$ gerade ist der Twistknoten δ_r und $K(0, s, 1)$ mit $s \geq 1$ ungerade ist der Torusknoten $b(s, 1)$.

Fall (ii): Wegen $K(r, s, -1) = K(r - 2, s - 2, 1)$, ein Beweis dieser Aussage wird unten gegeben, enthält die Klasse 1.1 die Knoten $K(r, s, -1)$ mit $r \geq 4$ gerade und $s \geq 5$ ungerade. $K(r, 1, -1)$ ist für jedes $r \geq 0$ gerade der triviale Knoten, $K(r, 3, -1) = K(r - 2, 1, 1)$ ist für $r \geq 0$ gerade der Twistknoten δ_{r-2} , $K(0, s, -1)$ ist für $s \geq 5$ der Torusknoten $b(s, 1)$ und $K(2, s, -1) = K(0, s - 2, 1)$ ist für $s \geq 5$ ungerade der Torusknoten $b(s - 2, 1)$.

Fall (iii): Von den Knoten des Typs $K(r, s, 1)$ mit $r \geq 0$ gerade und $s \leq -1$ ungerade enthält die Klasse 1.2 die Knoten $K(r, s, 1)$ mit $r \geq 2$ gerade und $s \leq -5$ ungerade. $K(0, s, 1)$ mit $s \leq -1$ ungerade ist der Torusknoten $b(-s, -1)$, $K(r, -1, 1)$ ist für jedes $r \geq 2$ gerade der triviale Knoten und $K(r, -3, 1) = K(r+2, -1, -1)$ ist für $r \geq 2$ gerade der Twistknoten δ_{r+1} .

Fall (iv): Wegen $K(r, s, -1) = K(r-2, s-2, 1)$ enthält die Klasse 1.2 die Knoten $K(r, s, 1)$ mit $r \leq -4$ gerade und $s \geq 3$ ungerade. $K(0, s, 1)$ mit $s \geq 1$ ungerade ist der Torusknoten $b(s, 1)$, $K(-2, s, 1) = K(0, s+2, -1)$ ist der Torusknoten $b(s+2, 1)$ und $K(r, 1, 1)$ ist für $r \leq -4$ gerade der Twistknoten δ_r .

Insgesamt folgt jetzt: Sei $K(r, s, \pm 1)$ ein Brezelknoten mit $r \in \mathbb{Z}$ gerade und $s \in \mathbb{Z}$ ungerade. Dann ist $K(r, s, \pm 1)$ ein Knoten der Klasse 1.1, der Klasse 1.2, ein Twistknoten δ_n mit $n \in \mathbb{Z}$ oder ein Torusknoten $b(p, \pm 1)$, $p \geq 1$ ungerade.

- (2) Sei $K(r, s, \pm 1)$ ein Brezelknoten mit $r, s \in \mathbb{Z}$ ungerade. Für die Vorzeichen von r, s und ± 1 gibt es bis auf Spiegelung des Knotens wieder die Möglichkeiten (i) — (iv), wegen $K(r, s, \pm 1) = K(s, r, \pm 1)$ genügt es, die Fälle (i) — (iii) zu betrachten.

Fall (i): Von den Knoten des Typs $K(r, s, 1)$ mit $r, s \geq 1$ ungerade enthält die Klasse 2.2 die Knoten $K(r, s, 1)$ mit $r \geq 3$ ungerade und $s \geq 1$ ungerade. $K(1, 1, 1)$ ist die Kleeblattschlinge $b(3, -1)$.

Fall (ii): Wegen $K(r, s, -1) = K(r-2, s-2, 1)$ enthält die Klasse 2.2 Knoten $K(r, s, -1)$ mit $r \geq 5$ ungerade und $s \geq 3$ ungerade. $K(r, 1, -1)$ ist für $r \geq 1$ ungerade der triviale Knoten, ebenso $K(1, s, -1)$ für $s \geq 1$ ungerade. $K(3, 3, -1) = K(1, 1, 1)$ ist die Kleeblattschlinge.

Fall (iii): Von den Knoten $K(r, s, 1)$ mit $r \geq 1$ ungerade und $s \leq -1$ ungerade enthält die Klasse 2.1 die Knoten des Typs $K(r, s, 1)$ mit $r \geq 1$ ungerade und $s \leq -3$ ungerade. $K(r, -1, 1)$ ist für $r \geq 1$ ungerade der triviale Knoten.

Insgesamt folgt jetzt: Sei $K(r, s, \pm 1)$ ein Brezelknoten mit $r, s \in \mathbb{Z}$ ungerade. Dann ist $K(r, s, \pm 1)$ ein Knoten der Klasse 2.1 oder der Klasse 2.2 ohne die Twistknoten, die Kleeblattschlinge $b(3, \pm 1)$ oder der triviale Knoten.

□

Insbesondere übertragen sich die Aussagen über die N -Äquivalenzklassen der Gruppen von Torusknoten [BRZ], bzw. der vier Klassen von 2-Brückenknoten auf die Gruppen der Brezelknoten des Typs $K(r, s, \pm 1)$.

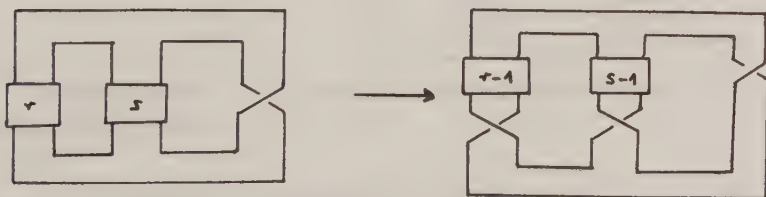
Abschließend bleibt noch die mehrfach verwendete Aussage $K(r, s, -1) = K(r-2, s-2, 1)$ zu zeigen.

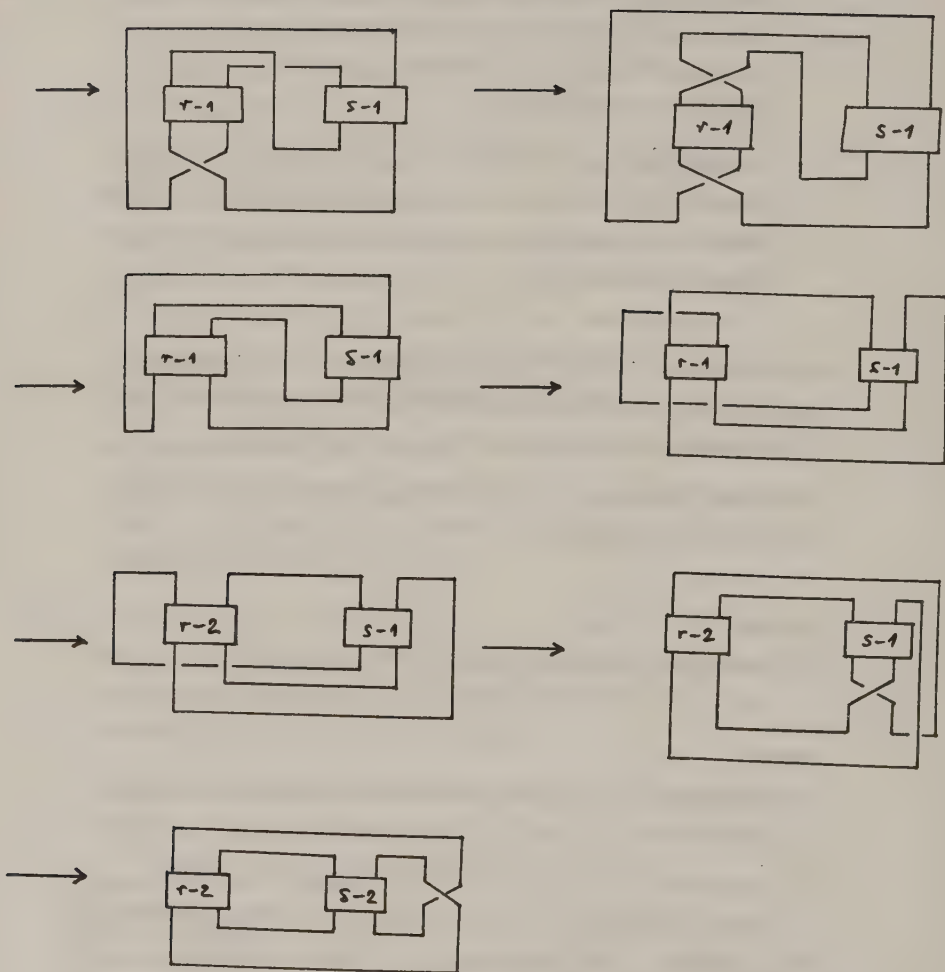
Lemma

Für Brezelknoten gilt: $K(r, s, -1) = K(r-2, s-2, 1)$.

Beweis

Der Brezelknoten $K(r, s, -1)$ läßt sich wie folgt auf die Form $K(r-2, s-2, 1)$ bringen:





□

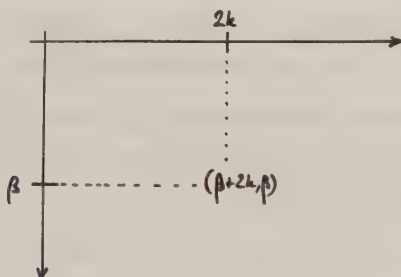
Noch eine abschließende Bemerkung über Heegaard-Zerlegungen der Außen-

räume von Brezelknoten.

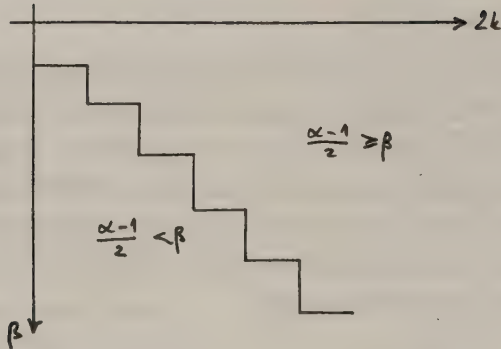
Nach [Osb 81] ist ein Knoten, dessen Außenraum eine Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht 2 besitzt, invertierbar. Andererseits gibt es Brezelknoten $K(r, s, t)$, die nicht invertierbar sind, siehe [Trot], deren Außenräume also keine Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht 2, sondern vom Geschlecht 3 besitzen, [Osb 81, p. 502]. Die oben betrachteten Brezelknoten $K(r, s, t)$ mit $t = \pm 1$ stellen die einfachsten Brezelknoten dar, die sicherlich invertierbar sind, vgl. [Trot, Rem. (2)].

2.6.3 Die „Größe“ der vier Knotenklassen

In diesem Abschnitt soll eine Vorstellung über die „Größe“ und „Verteilung“ der Knoten der vier Klassen vermittelt werden. Dazu werden ohne Einschränkung Normalformen $(\alpha, \beta) = (\beta + 2k, \beta)$ mit $\beta > 0$ ungerade und $k > 0$ betrachtet, die so in einer Ebene angeordnet werden:



Der obere Teil mit $\frac{\alpha-1}{2} \geq \beta$ und der untere Teil mit $\frac{\alpha-1}{2} < \beta$ werden getrennt betrachtet.



Im oberen Teil läßt sich jede Zeile in Abschnitte der Länge β einteilen. Der Abschnitt Nr. n , $n \geq 1$, enthält die Zahlenpaare

$$(2n\beta - 1, \beta), (2n\beta + 1, \beta), \dots, (2(n+1)\beta - 3, \beta).$$

Im ersten Abschnitt sind die ersten beiden Zahlenpaare $(2\beta - 1, \beta)$ und $(2\beta + 1, \beta)$ Normalformen von Twistknoten: $b(2\beta - 1, \beta) = \delta_{\beta-1}$ und $b(2\beta + 1, \beta) = \delta_{-\beta-1}$. In den anderen Abschnitten ist das erste Zahlenpaar $(2n\beta - 1, \beta)$ die Normalform eines Knotens der Klasse 1.1, das zweite Zahlenpaar $(2n\beta + 1, \beta)$ ist die Normalform eines Knotens der Klasse 1.2.

Alle 2-Brückenknoten mit Normalform $(\alpha, 3)$ sind in den vier Knotenklassen enthalten, ab $\beta \geq 5$ gibt es Normalformen, die nicht in den vier Knotenklassen enthalten sind.

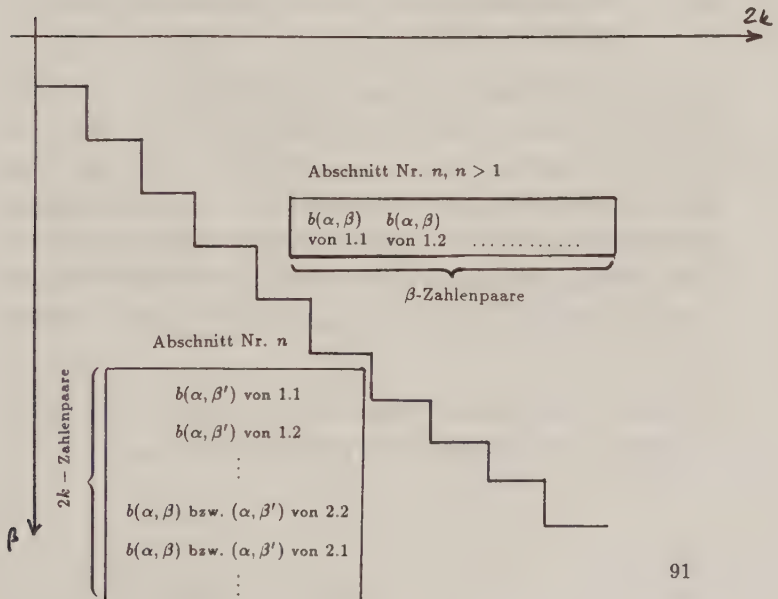
Der untere Teil der Anordnung mit $\frac{\alpha-1}{2} < \beta$ läßt sich in Abschnitte der Form

$$2k \begin{cases} (2k - 1 + 4nk, 4nk - 1) \\ (2k + 1 + 4nk, 4nk + 1) \\ \vdots \\ (6k - 3 + 4nk, 4k - 3 + 4nk) \end{cases}$$

einteilen, $n \geq 1$. Die oberste Normalform $(2k - 1 + 4nk, 4nk - 1)$ gehört zur Klasse 1.1 mit $k = p$ und $1 + 2n = -\frac{\sigma}{2}$. Die zweite Normalform $(2k + 1 + 4nk, 4nk + 1)$ ist in der Klasse 1.2 enthalten mit $k = p$ und $1 + 2n = \frac{\sigma}{2}$. Falls $k > 1$ ist, gehören zu einem solchen Abschnitt auch Knoten der Klassen 2.1 und 2.2: das Zahlenpaar $(4k - 1 + 4nk, 2k + 4nk - 1)$ ist die Normalform eines Knotens der Klasse 2.2 mit $p = 1 + n$ und $l = k$. Das darauf folgende Zahlenpaar $(4k + 1 + 4nk, 2k + 4nk + 1)$ gehört zu einem Knoten der Klasse 2.1 mit $p = 1 + n$ und $l = k$.

Die 2-Brückenknoten mit Normalformen $(\beta + 2, \beta)$, $(\beta + 4, \beta)$ und $(\beta + 6, \beta)$ sind alle in den vier Klassen enthalten. Erste Lücken treten bei Normalformen des Typs $(\beta + 8, \beta)$ auf.

Die Normalformen von Knoten der vier Klassen sind also in folgender Weise auf die Anordnung aller Normalformen in der Ebene verteilt:



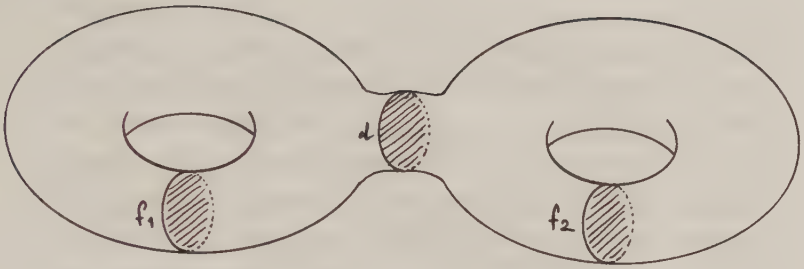
3. Realisierbarkeit der Relatoren als einfach geschlossene Kurven

In diesem Kapitel wird untersucht, welche der Relatoren der Gruppendarstellungen aus dem vorigen Kapitel sich nicht als einfach geschlossene Kurven auf einem Henkelkörper vom Geschlecht 2 realisieren lassen. Es stellt sich heraus, daß die Relatoren aus Lemma 2, 5, 8 und 11 sich nicht als einfach geschlossene Kurven realisieren lassen, wenn $j, q \geq 2$ bzw. $x, y \geq 2$ ist. Diese Gruppendarstellungen sind also nicht geometrisch, d.h. sie stammen nicht von einer Heegaard-Zerlegung des Knotenaußenraumes. Die Realisierbarkeit der Relatoren mit $j = 1$ oder $q = 1$ bzw. $x = 1$ oder $y = 1$ wird im nächsten Kapitel untersucht.

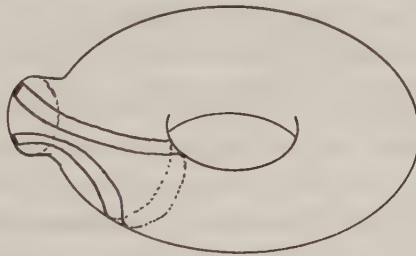
3.1 Einfach geschlossene Kurven auf einem Henkelkörper vom Geschlecht 2

Sei H_2 ein Henkelkörper vom Geschlecht 2. Ein Paar $z = \{f_1, f_2\}$ von Scheiben heißt eine *Zerschneidung* von H_2 , wenn $f_1 \cap f_2 = \emptyset$, $f_i \cap \partial H_2 = \partial f_i$ für $i \in \{1, 2\}$ und H_2 durch z in einem 3-Ball zerschnitten wird. Ordnet man f_1 den Buchstaben x_1 und f_2 den Buchstaben x_2 zu, entspricht jeder Kurve γ auf ∂H_2 , die ∂f_1 und ∂f_2 transversal schneidet, ein Wort in x_1 und x_2 abhängig davon, in welcher Reihenfolge und von welcher Seite γ die Kurven ∂f_1 und ∂f_2 kreuzt. Dieses ungekürzte Wort heißt die *Ablesung* von γ bzgl. z .

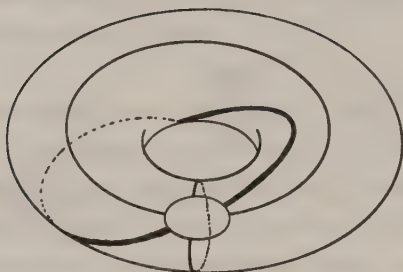
Der Rand $n := \partial d \subset H_2$ einer Scheibe d , $d \cap \partial H_2 = \partial d$, $d \cap f_1 = d \cap f_2 = \emptyset$, die H_2 in zwei Volltori zerlegt, heißt ein *Taillenschnitt* von H_2 .



Eine einfach geschlossene Kurve γ auf ∂H_2 wird durch einen Taillenschnitt in Bögen auf den beiden Volltori zerlegt. Ein solcher Bogen auf einem gelochten Torus, der nicht zerlegt, wenn man ihn durch ein Stück des Taillenschnittes schließt, heißt eine *Verbindung*. Zwei Verbindungen heißen *parallel*, wenn sie zusammen mit zwei Stücken des Taillenschnittes auf der Oberfläche des gelochten Torus eine Scheibe beranden.



In [Z 63'] wird gezeigt, daß ein System von Verbindungen, die sich gegenseitig nicht schneiden in höchstens drei Klassen paralleler Verbindungen zerfällt.



Für die Schnitzzahlen (a, α) und (b, β) zweier nichtparalleler Verbindungen gilt $\begin{vmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{vmatrix} = \pm 1$; die Schnitzzahlen der dritten Klasse untereinander paralleler Verbindungen sind die Summe der Schnitzzahlen der ersten beiden Klassen.

Das folgende Lemma wird im nächsten Abschnitt benutzt, um zu zeigen, daß nicht alle Relatoren der Gruppendarstellungen von Knoten der vier Klassen als Ablesung einfach geschlossener Kurven auftreten.

Lemma 14

Ein Wort $K \in \langle x_1, x_2 \rangle$ läßt sich nicht als einfach geschlossene Kurve auf ∂H_2 realisieren, falls es einen Automorphismus $\alpha \in \text{Aut}(\langle x_1, x_2 \rangle)$ gibt mit folgenden Eigenschaften ($\alpha(K)$ sei zyklisch gekürzt):

- (i) in $\alpha(K)$ tritt jede Erzeugende mindestens einmal mit einem Exponenten auf, der ungleich ± 1 ist,
- (ii) die Exponenten einer der Erzeugenden sind nicht alle teilerfremd.

Beweis

Angenommen, es gibt eine Kurve γ auf ∂H_2 mit Ablesung K . Nach [Z 63, §1] existiert zu dem Automorphismus α ein Homöomorphismus von H_2 , der γ auf eine einfach geschlossene Kurve γ' mit Ablesung $\alpha(K)$ abbildet. Wegen (i) ist nach [Z 63', §5] γ' homöomorph zu einer einfach geschlossenen Kurve γ'' mit Ablesung $\alpha(K)$, die günstig liegt (in „normal position“), d.h. jede Potenz einer Erzeugenden in $\alpha(K)$ entspricht einer Verbindung und umgekehrt entspricht jeder Verbindung eine Potenz in der Ablesung $\alpha(K)$, vgl. [Z 63', §3]. In $\alpha(K)$ tritt also jede Erzeugende mit höchstens drei dem Betrage nach verschiedenen Exponenten auf, die teilerfremd sind im Widerspruch zu (ii).

□

3.2 Die Realisierbarkeit der Relatoren

In diesem Abschnitt wird das Lemma 14 aus dem vorigen Abschnitt benutzt um zu zeigen, daß nur wenige Relatoren der Gruppendarstellungen als Ablesung einer einfach geschlossenen Kurve auf einem Henkelkörper vom Geschlecht 2 auftreten.

3.2.1 Die Relatoren der Klasse 1.1

Für die Relatoren $K_{j,q}^{1.1}$ aus Lemma 2 (vgl. Abschnitt 2.1.1) gilt:

Lemma 15

Die Relatoren $K_{j,q}^{1.1}$ mit $jq = p$ sind nicht als einfach geschlossene Kurven auf einem Henkelkörper vom Geschlecht 2 realisierbar, wenn $j, q \geq 2$ sind.

Beweis

Nach Lemma 2 ist

$$K_{j,q}^{1.1} \doteq \left(x_1 (x_2^{-q} x_1^{-1} x_2^q x_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} x_2^{-q} x_1 (x_2^q x_1^{-1} x_2^{-q} x_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} x_2^q \right)^j x_2^{-1}.$$

Nach Abbilden unter dem Automorphismus $\varphi: \begin{cases} x_1 \rightarrow x_1 x_2^q \\ x_2 \rightarrow x_2 \end{cases}$ von $\langle x_1, x_2 \mid \rangle$ erfüllt

$$\varphi(K_{j,q}^{1.1}) \doteq \left((x_1 x_2^{-q} x_1^{-1} x_2^q)^{\frac{|\beta|-1}{2}} x_1^2 (x_2^q x_1^{-1} x_2^{-q} x_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} x_2^{2q} \right)^j x_2^{-1}$$

falls $j, q \geq 2$ sind, die Voraussetzungen von Lemma 14, speziell sind die Exponenten q und $2q$ von x_2 nicht teilerfremd.

□

3.2.2 Die Relatoren der Klasse 1.2

Für die Relatoren $K_{j,q}^{1,2}$ aus Lemma 5 (vgl. Abschnitt 2.2.1) gilt:

Lemma 16

Die Relatoren $K_{j,q}^{1,2}$ mit $jq = p$ sind nicht als einfach geschlossene Kurven auf einem Henkelkörper vom Geschlecht 2 realisierbar, wenn $j, q \geq 2$ sind.

Beweis

Nach Lemma 5 ist

$$K_{j,q}^{1,2} \doteq \left(x_1 (x_2^q x_1^{-1} x_2^{-q} x_1)^{\frac{|p|-1}{2}} x_2^q x_2 (x_2^{-q} x_1^{-1} x_2^q x_1)^{\frac{|p|-1}{2}} x_2^{-q} \right)^j x_2^{-1}.$$

Dieser Relator enthält nach Abbilden mit dem Automorphismus

$\varphi: \begin{cases} x_1 \rightarrow x_1 x_2^{-q} \\ x_2 \rightarrow x_2 \end{cases}$ von $\langle x_1, x_2 \mid \rangle$ zwei Exponenten von x_2 , die nicht teilerfremd sind, falls $j, q \geq 2$ sind:

$$\varphi(K_{j,q}^{1,2}) \doteq \left((x_1 x_2^q x_1^{-1} x_2^{-q})^{\frac{|p|-1}{2}} x_1^2 (x_2^{-q} x_1^{-1} x_2^q x_1)^{\frac{|p|-1}{2}} x_2^{-2q} \right)^j x_2^{-1}.$$

□

3.2.3 Die Relatoren der Klasse 2.1

Für die Relatoren $K_{j,q}^{2,1}$ und $\tilde{K}_{x,y}^{2,1}$ aus Lemma 8 (vgl. Abschnitt 2.3.1) gilt:

Lemma 17

Die Relatoren $K_{j,q}^{2,1}$ mit $jq = p$ bzw. $\tilde{K}_{x,y}^{2,1}$ mit $xy = l$ sind nicht als einfach geschlossene Kurven auf einem Henkelkörper vom Geschlecht 2 realisierbar, wenn $j, q \geq 2$ bzw. $x, y \geq 2$ sind.

Beweis

Nach Lemma 8 ist

$$K_{j,q}^{2,1} \doteq \left((x_1 x_2^q x_1^{-1} x_2^{-q})^l (x_1^{-1} x_2^q x_1 x_2^{-q})^l \right)^j x_2^{-1}.$$

Nach Abbilden mit dem Automorphismus $\varphi: \begin{cases} x_1 \rightarrow x_2^{-q} x_1 \\ x_2 \rightarrow x_2 \end{cases}$ von $\langle x_1, x_2 \rangle$ erfüllt

$$\varphi(K_{j,q}^{2,1}) \doteq \left(x_1 x_2^q (x_1^{-1} x_2^{-q} x_1 x_2^q)^{l-1} x_1^{-2} (x_2^q x_1 x_2^{-q} x_1^{-1})^{l-1} x_2^q x_1 x_2^{-2q} \right)^j x_2^{-1}$$

für $l \geq 1$ die Voraussetzungen von Lemma 14, falls $j, q \geq 2$ sind; die Exponenten q und $-2q$ von x_2 sind nicht teilerfremd. Für den Realtor $\tilde{K}_{x,y}^{2,1}$ folgt die Behauptung analog. □

3.2.4 Die Relatoren der Klasse 2.2

Für die Relatoren $K_{j,q}^{2,2}$ und $\tilde{K}_{x,y}^{2,2}$ aus Lemma 11 (vgl. Abschnitt 2.4.1) gilt:

Lemma 18

Die Relatoren $K_{j,q}^{2,2}$ mit $jq = p$ bzw. $\tilde{K}_{x,y}^{2,2}$ mit $xy = l$ sind nicht als einfach geschlossene Kurven auf einem Henkelkörper vom Geschlecht 2 realisierbar, wenn $j, q \geq 2$ bzw. $x, y \geq 2$ sind.

Beweis

Nach Lemma 11 ist für $l \geq 1$

$$K_{j,q}^{2,2} \doteq x_2^{-1} \left((x_2^q x_1 x_2^{-q} x_1^{-1})^l (x_2^q x_1^{-1} x_2^{-q} x_1)^l \right)^j.$$

Dieser Relator enthält nach Abbilden mit dem Automorphismus

$\varphi: \begin{cases} x_1 \rightarrow x_2^q x_1 \\ x_2 \rightarrow x_2 \end{cases}$ von $\langle x_1, x_2 \rangle$ zwei Exponenten von x_2 , die nicht teilerfremd sind, falls $p, q \geq 2$ sind:

$$\begin{aligned} \varphi(K_{j,q}^{2,2}) &\doteq x_2^{-1} \left(x_2^{2q} x_1 x_2^{-q} (x_1^{-1} x_2^q x_1 x_2^{-q})^{l-1} x_1^{-2} \right. \\ &\quad \left. (x_2^{-q} x_1 x_2^q x_1^{-1})^{l-1} x_2^{-q} x_1 \right)^j. \end{aligned}$$

Für den Relator $\tilde{K}_{x,y}^{2,2}$ folgt die Behauptung analog.

□

3.3 Zusammenfassung

Die Ergebnisse der vorigen Abschnitte lassen sich jetzt so zusammenfassen:

Satz 6

Die Gruppendarstellungen $\langle x_1, x_2 \mid K_{j,q}^{1,1} \rangle$, $\langle x_1, x_2 \mid K_{j,q}^{1,2} \rangle$, $\langle x_1, x_2 \mid K_{j,q}^{2,1} \rangle$, $\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{x,y}^{2,1} \rangle$, $\langle x_1, x_2 \mid K_{j,q}^{2,2} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{x,y}^{2,2} \rangle$ mit $j, q \geq 2$ bzw.

$x, y \geq 2$ stammen nicht von Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2 der entsprechenden Knotenaußenräume.

Im nächsten Kapitel wird sich herausstellen, daß die Gruppendarstellungen mit $j = 1$ oder $q = 1$ bzw. $x = 1$ oder $y = 1$ geometrisch sind, sie stammen tatsächlich von Heegaard-Zerlegungen der Knotenaußenräume. Ferner werden die Zahlen p und σ , sowie die Einteilung der Knoten in die vier Klassen geometrisch verständlich.

4. Heegaard-Zerlegungen der Knotenaußenräume

Im vorigen Kapitel hat sich gezeigt, daß die Relatoren mit $j, q \geq 2$ bzw. $x, y \geq 2$ nicht durch einfach geschlossene Kurven realisiert werden können, die entsprechenden Gruppendarstellungen stammen also nicht von Heegaard-Zerlegungen des Knotenaußenraumes. Die Relatoren mit $j = 1$ oder $q = 1$ bzw. $x = 1$ oder $y = 1$ werden in diesem Kapitel untersucht, sie stammen von Heegaard-Zerlegungen des Knotenaußenraumes. Die einfach geschlossenen Kurven der Heegaard-Zerlegung erhält man auf geometrischem Wege, in dem man die algebraischen Operationen, die zu diesen Relatoren geführt haben, geometrisch nachvollzieht. Die Außenräume von 2-Brückenknoten der Klassen 1.1 und 1.2 besitzen schließlich mindestens drei nicht homöomorphe Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2, die der Klassen 2.1 und 2.2 für $p = l > 1$ mindestens zwei, für p oder l gleich 1 mindestens drei und für $p \neq l$, $p, l > 1$ mindestens vier nicht homöomorphe Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2.

4.1 Heegaard-Zerlegungen

Eine *Heegaard-Zerlegung* $(H_g; \gamma_1, \dots, \gamma_{g-1})$ vom *Geschlecht* g eines Knotenaußenraumes besteht aus einem Henkelkörper H_g vom Geschlecht g und $g - 1$ einfach geschlossenen disjunkten Kurven $\gamma_1, \dots, \gamma_{g-1}$ auf ∂H_g derart, daß der Knotenaußenraum entsteht, wenn längs der $g - 1$ einfach geschlossenen Kurven $g - 1$ 2-Henkel $D^2 \times I$ eingeklebt werden, d.h. $(\partial D^2) \times \{\frac{1}{2}\}$ wird jeweils mit einer der Kurven $\gamma_1, \dots, \gamma_{g-1}$ identifiziert. Zwei Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht g heißen *homöomorph*, wenn

es einen Homöomorphismus des Knotenaußenraumes gibt, der den Henkelkörper der einen Zerlegung auf den Henkelkörper der anderen Zerlegung abbildet. Eine Darstellung $\langle x_1, \dots, x_g \mid R_1, \dots, R_{g-1} \rangle$ der Fundamentalgruppe des Knotenaußenraumes heißt *geometrisch*, wenn sie von einer Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht g des Knotenaußenraumes stammt, d.h. die $g - 1$ 2-Henkel der Zerlegung werden längs einfach geschlossener Kurven mit Ablesungen $R_1, \dots, R_{g-1}$ eingeklebt. Für 2-Brückenknoten gilt:

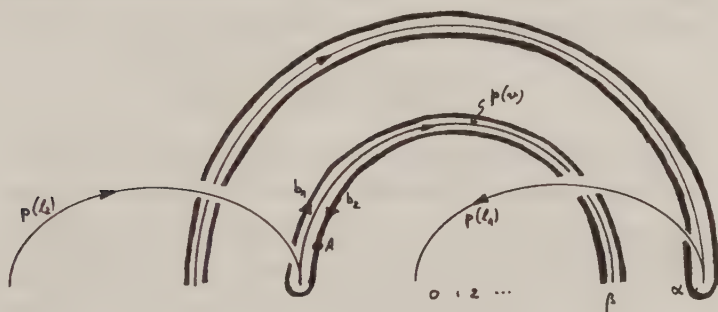
Lemma 19

Sei $b(\alpha, \beta)$ ein 2-Brückenknoten, dann ist die Darstellung $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ der Fundamentalgruppe des Außenraumes von $b(\alpha, \beta)$ geometrisch.

Beweis

Sei ohne Einschränkung $\beta > 0$. Jeder 2-Brückenknoten $b(\alpha, \beta)$ besitzt eine Zerlegung in vier Bögen l_1, u, l_2, v mit den in Kapitel 1 aufgeführten Eigenschaften. Aus dieser Darstellung erhält man wie in dem Beispiel in Kapitel 1 eine Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht 2 des Außenraumes von $b(\alpha, \beta)$ mit Darstellung $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ der Fundamentalgruppe. Man kann annehmen, daß der Knoten $b(\alpha, \beta)$ mit Ausnahme der beiden „Brücken“ $p(l_1)$ und $p(l_2)$ ganz auf einer Sphäre S^2 liegt, die ihrerseits in die S^3 eingebettet ist, die beiden Brücken sollen dabei im Äußeren der S^2 liegen. Bohrt man längs der beiden Brücken Tunnel in die S^3 und entfernt das Innere der S^2 , entsteht im Äußeren der jetzt vierfach gelochten S^2 ein Henkelkörper H_2 vom Geschlecht 2, $S^3 \setminus \overset{\circ}{H}_2$ ist ein Henkelkörper H'_2 vom Geschlecht 2. Nach einer kleinen Deformation verläuft der Knoten im Inneren der vierfach gelochten S^2 und den gebohrten Tunneln. Die einfach

geschlossene Kurve γ der Heegaard-Zerlegung, längs der in 2-Henkel eingeklebt wird, um schließlich den Knotenaußenraum zu erhalten, besteht aus zwei parallel zum Bogen $p(v)$ verlaufenden Bögen b_1 und b_2 , die auf verschiedenen Seiten von $p(v)$ liegen und durch zwei kleine Bögen in der Nähe der Endpunkte der Brücken geschlossen werde.



Klebt man jetzt längs dieser Kurve γ einen 2-Henkel $D^2 \times I$ mit $(\partial D^2) \times \{\frac{1}{2}\}$ auf γ , der bis auf seine Mantelfläche im Inneren der vierfach gelochten S^2 liegt, verläuft der Knoten $b(\alpha, \beta)$ innerhalb der gebohrten Tunnel und der durch den 2-Henkel gebildeten „Rinne“. Der Bogen $p(u)$ verbindet im Inneren der vierfach gelochten S^2 die anderen Endpunkte der Brücken miteinander, vgl. das Beispiel in Kapitel 1. Offenbar ist (H_2, γ) eine Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht 2 des Außenraumes von $b(\alpha, \beta)$.

Die aus den Bögen b_1 und b_2 entstandene Kurve γ mit Anfangspunkt A auf b_2 nahe dem Endpunkt der ersten Brücke, b_1 sei parallel zu $p(v)$ orientiert, besitzt tatsächlich die Ablesung $R_{(\alpha, \beta)}$. Dazu werden die Meridiane von H_2 so orientiert, daß einem Unterkreuzen der Brücken, die wie in [Fu, §2] orientiert seien, von rechts nach links ein positiver Exponent $+1$ in der

Ablesung entspricht. Nach [Fu, §2] ist

$$R_{(\alpha, \beta)} = x_1^{\text{sign}_\alpha \overline{0\beta}} \cdot x_2^{\text{sign}_\alpha \overline{\beta}} \cdot \dots \cdot x_2^{\text{sign}_\alpha \overline{(2\alpha-1)\beta}}.$$

Werden andererseits den Unterkreuzungspunkten des Bogens $p(v)$ Restklassen mod 2α so zugeordnet, daß deren Repräsentanten aus $(-\alpha, \alpha]$ ein Vorzeichen entsprechend der Richtung des Unterkreuzens besitzen, ist die Folge dieser Restklassen nach [Schu, §3] gleich

$$\overline{0}, \overline{\beta}, \overline{2\beta}, \dots, \overline{\alpha\beta}$$

und das Vorzeichen des jeweiligen Repräsentanten aus $(-\alpha, \alpha)$ ist gerade $\text{sign}_\alpha \overline{i\beta}$; die Restklassen $\overline{0}$ und $\overline{\alpha\beta}$ sind den Endpunkten der Brücken zugeordnet. Indem man die Kurve γ entlangläuft und abhängig von der Richtung, in der man die Brücken bzw. Henkel von H'_2 unterkreuzt x_1 bzw. x_2 mit einem Exponenten $+1$ oder -1 versieht, erhält man die Folge der Exponenten

$$\text{sign}_\alpha \overline{0\beta}, \text{sign}_\alpha \overline{\beta}, \dots, \text{sign}_\alpha \overline{\alpha\beta}, -\text{sign}_\alpha \overline{(\alpha-1)\beta}, \dots, -\text{sign}_\alpha \overline{\beta},$$

denn γ setzt sich aus den entgegengesetzt gerichteten Bögen b_1 und b_2 zusammen, die ihrerseits parallel zu $p(v)$ sind. Diese Folge ist wegen $-\text{sign}_\alpha \overline{(\alpha-j)\beta} = \text{sign}_\alpha \overline{(\alpha+j)\beta}$ für $1 \leq j \leq \alpha-1$, vgl. [Fu, Hilfssatz 1.1], gleich

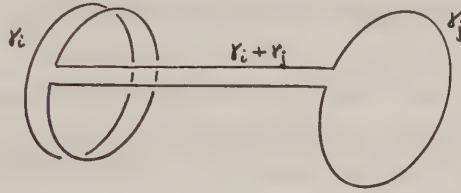
$$\text{sign}_\alpha \overline{0\beta}, \text{sign}_\alpha \overline{\beta}, \dots, \text{sign}_\alpha \overline{(2\alpha-1)\beta}.$$

Die Kurve γ besitzt also die Ablesung $R_{(\alpha, \beta)}$ und die Darstellung $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ stammt von der eben konstruierten Heegaard-Zerlegung.

□

Aus einer gegebenen Heegaard-Zerlegung $(H_g; \gamma_1, \dots, \gamma_{g-1})$ entsteht eine homöomorphe Heegaard-Zerlegung, wenn eine Kurve γ_j durch die *Summe*

$\gamma_i + \gamma_j$ zweier einfach geschlossener Kurven γ_i und γ_j ($i \neq j$) der Zerlegung ersetzt wird. Die Kurve $\gamma_i + \gamma_j$ besteht bis auf einen kleinen Bogen aus einem Bogen, der parallel und nahe γ_i verläuft, bis auf einen kleinen Bogen aus der Kurve γ_j und zwei nahe beieinander parallel verlaufenden Bögen, die die parallel zu γ_i und γ_j verlaufenden Bögen miteinander verbinden. Schematisch:



Offenbar ist $(H_g; \gamma_1, \dots, \gamma_i, \dots, \gamma_i + \gamma_j, \dots, \gamma_{g-1})$ eine Heegaard-Zerlegung desselben Knotenaußenraumes, die längs der Kurven eingeklebten 2-Henkel begrenzen gerade die Knotenumgebung, vgl. [S], [BRZ].

Außer dem eben beschriebenen Übergang von einer Heegaard-Zerlegung zu einer homöomorphen Heegaard-Zerlegung gibt es noch zwei weitere Möglichkeiten aus einer gegebenen Heegaard-Zerlegung eine andere Heegaard-Zerlegung zu konstruieren: durch Stabilisation bzw. Reduktion. Sei $(H_g; \gamma_1, \dots, \gamma_{g-1})$ eine Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht g und b ein einfacher Bogen, der bis auf seine Endpunkte ganz im Inneren von H_g verläuft und in den sich eine Scheibe $D \subset H_g$ so einspannen läßt, daß $\partial D = b \cup (D \cap H_g)$. Nach Entfernen einer abgeschlossenen regulären Umgebung $U(b)$ von b aus H_g entsteht ein Henkelkörper $H_{g+1} := \overline{H_g \setminus U(b)}$ vom Geschlecht $g+1$. Sei $s \subset \partial H_{g+1}$ eine einfach geschlossene zu $\gamma_1, \dots, \gamma_{g-1}$ disjunkte Kurve, so daß $(H_{g+1}; \gamma_1, \dots, \gamma_{g-1}, s)$ eine Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht $g+1$ derselben Knotenaußenraumes darstellt. Dann heißt der Übergang von der ursprünglichen Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht

g zu einer solchen Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht $g + 1$ eine *Stabilisation*, der umgekehrte Übergang heißt *Reduktion*.

In den folgenden vier Abschnitten werden die algebraischen Schritte, d.h. die Erzeugendenwechsel und Tietze-Operationen, die zu den Gruppendarstellungen mit $q = 1$ bzw. $y = 1$ geführt haben, geometrisch nachvollzogen. Ausgehend von einer Heegaard-Zerlegung (H_2, γ) des Außenraumes eines Knotens einer der vier Klassen mit Fundamentalgruppendarstellung $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ bzw. $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ (entsprechend $j = 1$ oder $x = 1$) läßt sich der erste, freie Erzeugendenwechsel durch Übergang zu einer anderen Zerschneidung des Henkelkörpers H_2 realisieren, so daß die Fundamentalgruppe des Außenraumes bzgl. der neuen Meridiane die nach dem freien Erzeugendenwechsel erhaltene Form besitzt. Der zweite Erzeugendenwechsel $z_2 = y_2^j$ ist kein freier Erzeugendenwechsel, er wird durch eine Stabilisation realisiert. Dazu wird in den Henkelkörper ein Loch gebohrt, das einen z_2 -Henkel entspricht und in eine einfach geschlossene Kurve s mit Ablesung $z_2^{-1}y_2^j$, die disjunkt ist zu γ ein 2-Henkel geklebt, so daß aus (H_2, γ) eine Heegaard-Zerlegung $(H_3; \gamma, s)$ vom Geschlecht 3 desselben Knotenaußenraumes entsteht mit Fundamentalgruppendarstellung $\langle y_1, y_2, z \mid R(y_1, y_2), z_2^{-1}y_2^j \rangle$. Nach gewissen Additionen der Kurve s zur Kurve γ ergibt sich eine Heegaard-Zerlegung mit Fundamentalgruppendarstellung $\langle y_1, y_2, z_2 \mid y_2^{-1}S(y_1, z_2), z_2^{-1}y_2^j \rangle$. Jetzt läßt sich der folgende Satz von Osborne anwenden, siehe [Osb, Th. 2.2], infolgedessen $\langle y_1, z_2 \mid z_2^{-1}(S(y_1, z_2))^j \rangle$ eine geometrische Darstellung desselben Knotenaußenraumes ist:

Satz (Osborne)

Sei $\langle x_1, \dots, x_n \mid R_{1, \dots, R_m} \rangle$ eine geometrische Darstellung von M und sei $R_1 = x_1^{-1}R'_1$ mit einem Wort R'_1 in den Buchstaben $x_2^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}$. Dann

ist auch $\langle x_2, \dots, x_n \mid \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_m \rangle$ eine geometrische Darstellung von M , wobei $\bar{R}_j$ aus R_j entsteht, in dem jeder Buchstabe x_1 durch R'_1 ersetzt wird.

Diese Darstellung erhält man aber auch, wenn man p -mal die $y_2^{-1}S(y_1, z_2)$ realisierende Kurve zur Kurve s addiert und schließlich den Henkelkörper H_3 längs des in die Kurve mit Ablesung $y_2^{-1}S(y_1, z_2)$ eingeklebten 2-Henkels aufschneidet, d.h. durch eine abschließende Reduktion.

4.2 Heegaard-Zerlegungen der vier Knotenklassen

4.2.1 Die Knoten der Klasse 1.1

Lemma 20

Sei $b(\alpha, \beta)$ ein Knoten der Klasse 1.1, d.h. $(\alpha, \beta) = (p|\sigma| - 1, \frac{\sigma}{2})$, wobei $p > 1$, $\frac{\sigma}{2} \in \mathbb{Z}$ ungerade und $|\sigma| > 2$ ist. Dann stammt die Darstellung

$$\langle y_1, y_2, z_2 \mid z_2^{-1}y_2^p, y_2^{-1}y_1(z_2^{-1}y_1^{-1}z_2y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}}z_2^{-1}y_1(z_2y_1^{-1}z_2^{-1}y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}}z_2 \rangle$$

von einer Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht 3 des Außenraumes von $b(\alpha, \beta)$.

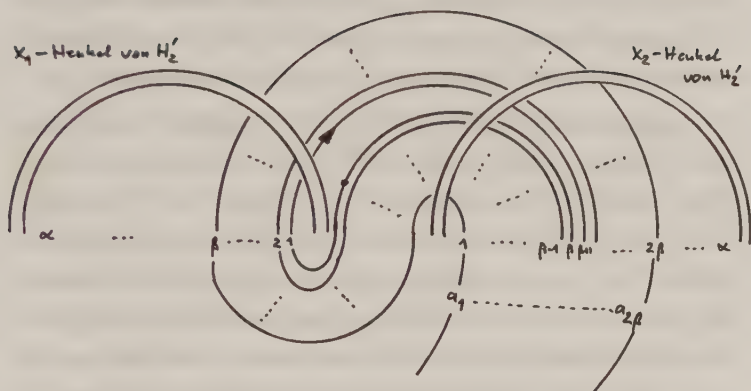
Beweis

Der Beweis von Lemma 20 wird in mehreren Schritten geführt. Ausgangspunkt ist die Heegaard-Zerlegung $(H_2; \gamma)$ aus Lemma 19, bei deren Konstruktion sich gleichzeitig eine geometrische Interpretation der Zahlen p und σ ergibt. Der Erzeugendenwechsel $y_2 = x_1x_2$, $y_1 = x_1$ läßt sich durch einen Wechsel der Zerschneidung von H_2 realisieren, der zweite

Erzeugendenwechsel $z_2 = y_2^p$ durch eine Stabilisation. Dazu wird in den Henkelkörper H_2 ein Loch gebohrt, der dadurch in einen Henkelkörper H_3 vom Geschlecht 3 übergeht. Nach Konstruktion einer $z_2^{-1}y_2^p$ realisierenden Kurve s auf H_3 wird gezeigt, daß die Kurven γ und s disjunkt sind und in die Kurve s ein 2-Henkel eingeklebt werden kann, der bis auf seine Mantelfläche $(\partial D^2) \times I$ ganz im Äußeren von H_3 liegt, so daß $(H_3; \gamma, s)$ eine Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht 3 des Knotenaußenraumes darstellt. Die Behauptung folgt dann nach $|\sigma|$ Addition der Kurve $s^{\pm 1}$ zur Kurve γ .

Sei ohne Einschränkung $\beta = \frac{\sigma}{2} > 1$. Die Kurve γ der Heegaard-Zerlegung (H_2, γ) aus Lemma 19 im vorigen Abschnitt besteht aus zwei zu $p(v)$ parallelen Bögen b_1 und b_2 , die auf verschiedenen Seiten von $p(v)$ liegen und durch kleine Bögen an den Enden der Henkel von H'_2 geschlossen werden. Nach Konstruktion unterkreuzt γ den x_1 -Henkel und den x_2 -Henkel von H'_2 α -mal, die Unterkreuzungspunkte seien der Reihe nach mit den Zahlen $1, \dots, \alpha$ bezeichnet entgegen der Orientierung des in den Henkeln verlaufenden Knotens $b(\alpha, \beta)$, vgl. [Fu, §2].

Die Punkte β und $\beta + 1$ des x_2 -Henkels sind (vgl. den Beweis von Lemma 19) über einen den x_1 -Henkel im Punkt 1 unterkreuzenden Bogen miteinander verbunden, denn zwischen den Punkte β und $\beta + 1$ des x_2 -Henkels verläuft das Anfangsstück von $p(v)$. Parallel zu diesem Bogen werden die Punkte $1, \dots, \beta - 1$ des x_2 -Henkels durch $\beta - 1$ Bögen, die den x_1 -Henkel in den Punkten $2, \dots, \beta$ unterkreuzen, mit den Punkten $\beta + 2, \dots, 2\beta$ des x_2 -Henkels verbunden.



Die an den Unterkreuzungspunkten $1, \dots, 2\beta$ des x_2 -Henkels beginnenden parallelen Bögen von γ , die mit $a_1, \dots, a_{2\beta}$ bezeichnet seien, unterkreuzen den x_1 -Henkel in den Punkten $\beta + 1, \dots, 3\beta$, anschließend den x_2 -Henkel in den Punkten $2\beta + 1, \dots, 4\beta$, dann den x_1 -Henkel in den Punkten $3\beta + 1, \dots, 5\beta$, daraufhin den x_2 -Henkel in den Punkten $4\beta + 1, \dots, 6\beta$ usw. Weil $\beta + (p-1)2\beta = 2\beta p - \beta < \alpha$ ist und $\beta + p2\beta > \alpha$ ist, unterkreuzen die Bögen $a_1, \dots, a_{2\beta}$ den x_1 -Henkel insgesamt $(p-1)$ -mal, beim letzten Mal unterkreuzen sie den x_1 -Henkel in den Punkten $(2p-3)\beta + 1, \dots, (2p-1)\beta$. Anschließend unterkreuzen $a_1, \dots, a_{2\beta-1}$ den x_2 -Henkel in den Punkten $(p-1)2\beta + 1, \dots, \alpha$, der Bogen $a_{2\beta}$ läuft außen am x_2 -Henkel vorbei, denn $p \cdot 2\beta = \alpha + 1$.

Die parallelen Bögen $a_1, \dots, a_{2\beta}$ unterkreuzen also $(p-1)$ -mal den x_1 -Henkel und bis auf den Bogen $a_{2\beta}$ p -mal den x_2 -Henkel.

Der Bogen $a_{2\beta}$ wird mit dem Bogen $a_{2\beta-1}$ im Unterkreuzungspunkt α des x_2 -Henkels geschlossen; von den in den Unterkreuzungspunkten $(p-1)2\beta + 1, \dots, \alpha - 1$ des x_2 -Henkels beginnenden Bögen von γ unterkreuzen

die ersten $\beta - 1$ parallelen Bögen $c_1, \dots, c_{\beta-1}$ den x_1 -Henkel in den noch verbleibenden Unterkreuzungspunkten $(2p-1)\beta + 1, \dots, \alpha$ und enden in den Unterkreuzungspunkten $\beta(2p-1), \dots, \alpha-1$ des x_2 -Henkels.

Der Erzeugendenwechsel $y_2 = x_1 x_2$, $y_1 = x_1$ aus dem Beweis von Lemma 2 (siehe Abschnitt 2.1.1) läßt sich durch einen Wechsel der Zerschneidung von H_2 geometrisch realisieren, vgl. [Z 63]. Dazu wird die Meridiankurve l_2 des x_2 -Henkels von H_2 beibehalten und die Meridiankurve des x_1 -Henkels von H_2 gegen eine einfach geschlossene Kurve l_1 ausgetauscht, die sich aus den beiden Meridiankurven der Henkel von H_2 zusammensetzt. Die Ablesung einer Kurve k bzgl. der neuen Zerschneidung von H_2 ist ein Wort in den Buchstaben y_1 und y_2 , deren Aufeinanderfolge und Exponenten von den Schnittpunkten der Kurve mit den Kurven l_1 und l_2 der neuen Zerschneidung abhängen. Aus der Heegaard-Zerlegung mit Fundamentalgruppendarstellung $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$, wobei

$$R_{(\alpha, \beta)} = \left((x_1 x_2)^p x_1^{-1} (x_1 x_2)^{-p} x_1 \right)^{\frac{|\beta|-1}{2}} (x_1 x_2)^p x_2^{-1} \\ \cdot \left((x_1 x_2)^{-p} x_1^{-1} (x_1 x_2)^p x_1 \right)^{\frac{|\beta|-1}{2}} (x_1 x_2)^{-p} x_1$$

entsteht eine Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht 2 desselben Knotenaußenraumes mit Fundamentalgruppendarstellung

$$\langle y_1, y_2 \mid (y_2^p y_1^{-1} y_2^{-p} y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} y_2^{p-1} y_1 \\ \cdot (y_2^{-p} y_1^{-1} y_2^p y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} y_2^{-p} y_1 \rangle$$

denn beim Übergang zu der neuen Zerschneidung sind der Henkelkörper H_2 , die Kurve γ und der eingeklebte 2-Henkel der Heegaard-Zerlegung unverändert geblieben, nur die Ablesung der Kurve γ hat sich geändert.

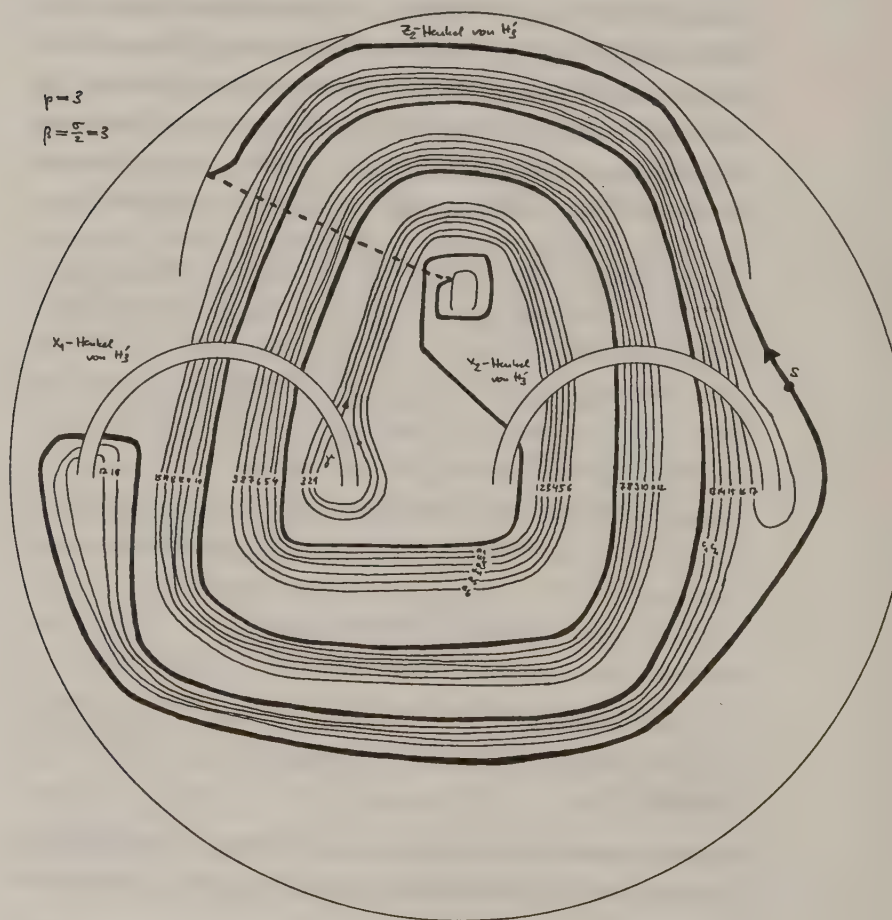
Jetzt bleibt noch der Erzeugendenwechsel $z_2 = y_2^p$ durch eine Stabilisation zu realisieren. Aus dem Henkelkörper H_2 entsteht mit dem gebohrten

Tunnel ein Henkelkörper H_3 vom Geschlecht 3, der ausgebohrte Tunnel entspricht einem z_2 -Henkel von H'_2 , deshalb geht der Henkelkörper H'_2 in einen Henkelkörper H'_3 vom Geschlecht 3 über. Der Tunnel wird so gebohrt, daß die den x_2 -Henkel von H'_2 unterkreuzenden Bögen von γ vor dem Unterkreuzen über den z_2 -Henkel von H'_3 laufen. Schließlich wird in eine das Wort $z_2^{-1}y_2^p$ realisierende einfach geschlossene Kurve s ein 2-Henkel geklebt. Diese Kurve s läßt sich auf dem z_2 -Henkel aus einer Verbindung des Typs $(-1, 1 - p)$, $p - 1$ Verbindungen des Typs $(0, 1)$ und p Bögen mit Ablesung y_2 zusammensetzen, die zuerst den x_2 -Henkel von H'_3 und dann des x_1 -Henkels von H'_3 in positiver Richtung genau einmal unterkreuzen; die Kurve s besitzt also die Ablesung $z_2^{-1}(y_2 z_2^0)^{p-1} y_2$.

Jetzt ist zu zeigen, daß die Kurven γ und s disjunkt realisierbar sind. Die Kurve s habe ihren Anfangspunkt neben dem am x_2 -Henkel von H'_3 vorbeilaufenden Bogen $a_{2\beta}$ von γ . Die Verbindung $(-1, p - 1)$ von s auf dem z_2 -Henkel von H'_3 ist disjunkt zu γ realisierbar, denn γ besteht auf dem z_2 -Henkel nur aus Verbindungen des Typs $(0, 1)$. Der Bogen von s mit Ablesung $(y_2 z_2^0)^{p-1} y_2$ läuft parallel zu den Bögen $a_1, \dots, a_{2\beta-1}$ von γ , d.h. er unterkreuzt den x_2 -Henkel zwischen den Unterkreuzungspunkten 0 und 1, dann den x_1 -Henkel bzw. β und $\beta + 1$, läuft parallel zu $a_1, \dots, a_{2\beta}$ über den z_2 -Henkel, unterkreuzt den x_2 -Henkel zwischen 2β und $2\beta + 1$, unterkreuzt daraufhin den x_1 -Henkel zwischen 3β und $3\beta + 1$ usw., schließlich unterkreuzt er den x_2 -Henkel zwischen $(p-1)2\beta$ und $(p-1)2\beta + 1$, von hier an läuft s parallel zu den Bögen $c_1, \dots, c_{\beta-1}$ von γ , unterkreuzt dabei den x_1 -Henkel zwischen $(2p-1)\beta$ und $(2p-1)\beta + 1$ und endet am Anfangspunkt.

Die Kurve s ist also disjunkt zur Kurve γ realisierbar, denn die Verbindung $(-1, p - 1)$ von s auf dem z_2 -Henkel von H'_3 ist disjunkt zu γ , der Bogen

mit Ableitung $(y_2 z_2^0)^{p-1} y_2$ liegt parallel zu den Bögen $a_1, \dots, a_{2\beta-1}$ von γ und das letzte Stück von s läuft parallel zu den Bögen $c_1, \dots, c_{\beta-1}$ von γ .



In die oben konstruierte Kurve s läßt sich wie folgt ein 2-Henkel einspannen, der bis auf seine Mantelfläche ganz im Äußeren des Henkelkörpers H_3 liegt: in jeden der Bögen mit Ablesung y_2 kann eine Scheibe so eingespannt werden, daß dieser Bogen mit Ablesung y_2 ein Stück der Randkurve dieser Scheibe ist, die bis auf ihren Rand im Äußeren von H_3 enthalten ist und deren übriger Randbogen zwei über den z_2 -Henkel laufende Verbindungen von s miteinander verbindet. Die auf dem z_2 -Henkel von H'_3 entstandene einfach geschlossene Kurve besteht aus $p-1$ Verbindungen des Typs $(0,1)$, einer Verbindung des Typs $(-1,1-p)$ und p trivialen Verbindungsbögen, die von den Randkurvenstücken der p Scheiben stammen. Auf die Verbindung des Typs $(-1,1-p)$ folgen abwechselnd ein trivialer Bogen und eine Verbindung des Typs $(0,1)$, dann schließt sich die Kurve mit einem trivialen Bogen. Also ist diese Kurve homotop zur geschlossenen Kurve $(-1,0)$, in die eine Scheibe der geforderten Art eingespannt werden kann. Aus diesen Bemerkungen ergibt sich, wie der 2-Henkel in die Kurve s einzukleben ist.

$(H_3; \gamma, s)$ ist eine Heegaard-Zerlegung des Außenraumes von $b(\alpha, \beta)$, denn der Bogen $p(v)$, vgl [Fu, §2] und den Beweis von Lemma 19 im vorigen Abschnitt, verläuft innerhalb des Bereiches, den der in die Kurve γ eingeklebte 2-Henkel aus H'_3 herausschneidet und verbindet den Endpunkt der im x_1 -Henkel von H'_3 liegenden Brücke mit dem Anfangspunkt der im x_2 -Henkel von H'_3 liegenden Brücke. Die anderen beiden Endpunkte der Brücken werden durch den Bogen $p(u)$ miteinander verbunden, er verläuft jetzt parallel zu den Bögen $a_1, \dots, a_{2\beta}$ von γ innerhalb des Bereiches, den der in die Kurve s eingeklebte 2-Henkel aus H'_3 herausschneidet und endet am Anfangspunkt der im x_1 -Henkel von H'_3 liegenden Brücke innerhalb des letzten Bogens von s mit Ablesung y_2 . Der Bogen $p(u)$ verläuft also stets unterhalb des in die Kurve γ eingeklebten 2-Henkels im Inneren von

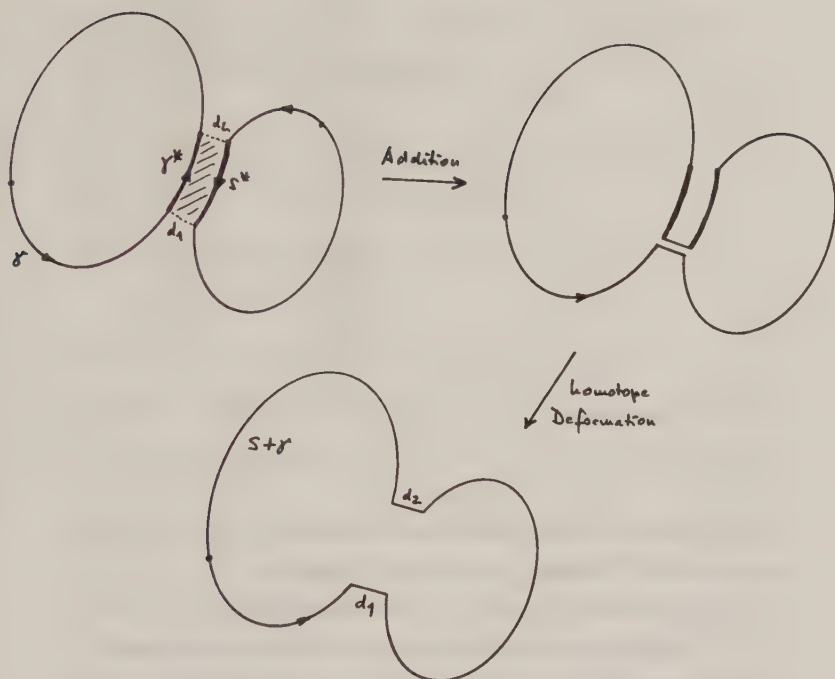
H'_3 ; bzgl. der Heegaard-Zerlegung $(H_2; \gamma)$ verlief der Bogen $p(u)$ unterhalb des in die Kurve γ eingeklebten 2-Henkels im Inneren von H'_2 , jetzt wird er innerhalb des Bereiches, den der in die Kurve s eingeklebte 2-Henkel aus H'_3 herauschneidet, p -mal durch den z_2 -Henkel von H'_3 geführt, nach Konstruktion entstehen dabei keine neuen Verknotungen und es werden keine beseitigt, folglich ist $(H_3; \gamma, s)$ eine Heegaard-Zerlegung desselben Knotenaußenraumes.

Zum Beweis von Lemma 20 sind noch 2β Additionen der Kurve s zur Kurve γ erforderlich, dazu eine allgemeine

Bemerkung

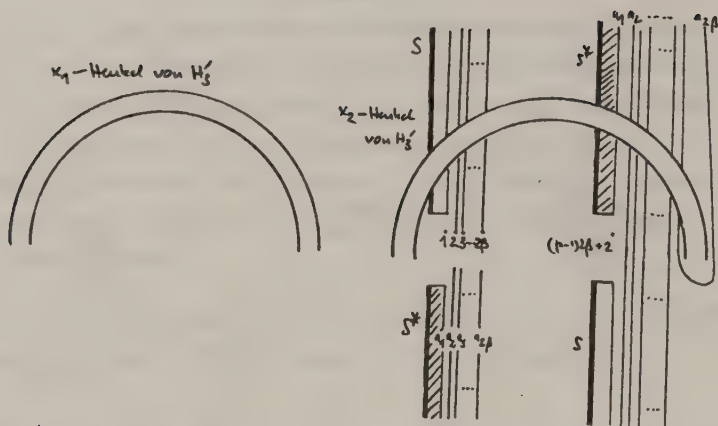
Seien γ und s zwei einfach geschlossene, disjunkte Kurven auf H'_3 , γ besitze einen Bogen γ^* , der parallel zu einem Bogen s^* von s verläuft, γ^* und s^* seien (bzgl. der von γ und s induzierten Orientierung) entgegengesetzt gerichtet. Es gebe zwei Bögen d_1 und d_2 zwischen den Endpunkten von γ^* und s^* , so daß d_1, γ^*, d_2 und s^* eine Scheibe beranden, die sonst keine Bögen von γ oder s enthält und auf $\partial H'_3$ zusammenziehbar ist.

Wird jetzt die Kurve s zur Kurve γ addiert, so daß eine der beiden Verbindungsstrecken der Addition d_1 oder d_2 ist, so ist die Ablesung der Kurve $s + \gamma$ gleich der Ablesung von γ bis auf das Teilwort mit der Ablesung von γ^* , das durch die Ablesung des Bogens $s \setminus s^*$ ersetzt wird. Die Kurve $s + \gamma$ besteht nach homotoper Deformation aus den Bögen $\gamma \setminus \gamma^*$, $d_1 s \setminus s^*$ und d_2 .



Oben wurde gezeigt, daß die Bögen $a_1, \dots, a_{2\beta-1}$ von γ parallel zu einem Bogen von s mit Ablesung $(y_2 z_2^0)^{p-1} y_2$ verlaufen und $a_{2\beta}$ parallel einem Bogen von s mit Ablesung $(y_2 z_2^0)^{p-1}$.

Die Verbindungsstrecken der ersten Addition von s zu γ verlaufen zwischen dem Bogen s^* von s mit Ablesung $(y_2 z_2^0)^{p-1} y_2$ und a_1 bei den Unterkreuzungspunkten 1 bzw. $(p-1)2\beta+1$ des x_2 -Henkels. Entsprechend der vorigen Bemerkung enthält die Kurve $s + \gamma$ die Bögen s^* und a_1 nicht mehr.



Die Verbindungsstrecken der j -ten Addition, $1 \leq j \leq 2\beta - 1$ verlaufen analog zwischen dem Bogen s^* von $s^{\pm 1}$ mit Ablesung $\left((y_2 z_2^0)^{p-1} y_2\right)^{\pm 1}$ und a_j bei den Unterkreuzungspunkten 1 bzw. $(p-1)2\beta + 1$ des x_2 -Henkels. Entsprechend der Bemerkung oben entfallen nach der Addition jeweils die Bögen s^* und a_j . Die Verbindungsstrecken der letzten Addition verlaufen zwischen dem Bogen von s^{-1} mit Ablesung $\left((y_2 z_2^0)^{p-1}\right)^{-1}$ und $a_{2\beta}$ beim Unterkreuzungspunkt 1 des x_2 -Henkels und bevor $a_{2\beta}$ außen am x_2 -Henkel vorbeiläuft.

Die nach den 2β Additionen erhaltene Kurve unterkreuzt den x_2 -Henkel genau einmal und die Ablesung der Kurve geht aus der Ablesung von γ hervor, indem gemäß der Bemerkung oben $y_2^{\pm p}$ durch $z_2^{\pm 1}$ und y_2^{p-1} durch $z_2 y_2^{-1}$ ersetzt wird. Aus der Kurve γ mit Ablesung

$$(y_2^p y_1^{-1} y_2^{-p} y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} y_2^{p-1} y_1 (y_2^{-p} y_1^{-1} y_2^p y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} y_2^{-p} y_1$$

entsteht also nach den Additionen eine einfach geschlossene Kurve mit Ablesung

$$(z_2 y_1^{-1} z_2^{-1} y_1)^{\frac{i|\beta|-1}{2}} z_2 y_2^{-1} y_1 (z_2^{-1} y_1^{-1} z_2 y_1)^{\frac{i|\beta|-1}{2}} z_2^{-1} y_1$$

und damit ist die Gruppendarstellung

$$\begin{aligned} \langle y_1, y_2, z_2 \mid z_2^{-1} y_2^p, (z_2 y_1^{-1} y_2^{-1} y_1)^{\frac{j|\beta|-1}{2}} z_2 y_2^{-1} y_1 \\ \cdot (z_2^{-1} y_1^{-1} z_2 y_1)^{\frac{i|\beta|-1}{2}} z_2^{-1} y_1 \rangle \end{aligned}$$

eine geometrische Darstellung des Außenraums von $b(\alpha, \beta)$.

□

Aus Satz 1 (siehe Abschnitt 2.1.2), Lemma 20 und dem zitierten Satz aus [Osb, Th. 2.2] folgt schließlich:

Satz 7

Sei $b(\alpha, \beta)$ ein Knoten der Klasse 1.1, d.h. $(\alpha, \beta) = (p|\sigma| - 1, \frac{\sigma}{2})$ wobei $p > 1$, $\frac{\sigma}{2} \in \mathbb{Z}$ ungerade und $|\sigma| > 2$ ist. Dann besitzt der Außenraum dieses Knotens mindestens drei nicht homöomorphe Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2 mit zugehörigen Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$, $\langle x_1, x_2 \mid K_{p,1}^{1,1} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ der Fundamentalgruppe des Knotenaußenraumes.

Beweis

Nach Lemma 19 (siehe Abschnitt 4.1) sind die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ geometrisch und nach [Osb, Th. 2.2] und Lemma 20 ist die Darstellung $\langle x_1, x_2 \mid K_{p,1}^{1,1} \rangle$ geometrisch. Diese Gruppendarstellungen sind nicht N -äquivalent, wie der Satz 1 in Abschnitt 2.1.2 zeigt.

□

4.2.2 Die Knoten der Klasse 1.2

Lemma 21

Sei $b(\alpha, \beta)$ ein Knoten der Klasse 1.2, d.h. $(\alpha, \beta) = (p|\sigma| + 1, \frac{\sigma}{2})$, wobei $\frac{\sigma}{2} \in \mathbb{Z}$ ungerade, $|\sigma| > 2$ und $p > 1$ ist. Dann stammt die Darstellung

$$\langle y_1, y_2, z_2 \mid z_2^{-1} y_2^p, y_2^{-1} z_2^{-1} y_1 (z_2 y_1^{-1} z_2^{-1} y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} \cdot z_2 y_1 (z_2^{-1} y_1^{-1} z_2 y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} \rangle$$

von einer Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht 3 des Außenraumes von $b(\alpha, \beta)$.

Beweis

Sei ohne Einschränkung $\beta = \frac{\sigma}{2} > 1$. Die Kurve γ der Heegaard-Zerlegung (H_2, γ) besteht aus zwei zu $p(v)$ parallelen Bögen b_1 und b_2 , die auf verschiedenen Seiten von $p(v)$ liegen und durch kleine Bögen an den Enden der Henkel von H'_2 geschlossen werden. Nach Konstruktion unterkreuzt γ den x_1 -Henkel und den x_2 -Henkel von H'_2 α -mal, die Unterkreuzungspunkte seien wie im vorigen Abschnitt der Reihe nach mit den Zahlen $1, \dots, \alpha$ bezeichnet entgegen der Orientierung des in den Henkeln verlaufenden Knotens $b(\alpha, \beta)$.

Die Punkte β und $\beta + 1$ des x_2 -Henkels sind über einen den x_1 -Henkel im Punkt 1 unterkreuzenden Bogen miteinander verbunden; parallel zu diesem Bogen werden die Punkte $1, \dots, \beta - 1$ des x_2 -Henkels durch $\beta - 1$ Bögen, die den x_1 -Henkel in den Punkten $2, \dots, \beta$ unterkreuzen mit den Punkten $\beta + 2, \dots, 2\beta$ des x_2 -Henkels verbunden, vgl. die Skizze im Beweis von Lemma 20 im vorigen Abschnitt.

Wie oben seien die an den Unterkreuzungspunkten $1, \dots, 2\beta$ des x_2 -Henkels beginnenden parallelen Bögen von γ mit $a_1, \dots, a_{2\beta}$ bezeichnet. Diese

Bögen unterkreuzen den x_1 -Henkel in den Punkten $\beta + 1, \dots, 3\beta$, anschließend den x_2 -Henkel in den Punkten $2\beta - 1, \dots, 4\beta$, dann den x_1 -Henkel in den Punkten $3\beta + 1, \dots, 5\beta$, daraufhin den x_2 -Henkel in den Punkten $4\beta + 1, \dots, 6\beta$ usw. Weil $\beta + (p - 1)2\beta = 2p\beta - \beta < \alpha$ ist und $\beta + 2p\beta > \alpha$ ist, unterkreuzen die Bögen $a_1, \dots, a_{2\beta}$ den x_1 -Henkel insgesamt $(p - 1)$ -mal, beim letzten Mal unterkreuzen sie den x_1 -Henkel in den Punkten $(2p - 3)\beta + 1, \dots, (2p - 1)\beta$. Anschließend enden die Bögen $a_1, \dots, a_{2\beta}$ in den Unterkreuzungspunkten $(p - 1)2\beta + 1 = \alpha - 2\beta, \dots, \alpha - 1$ des x_2 -Henkels. Die Bögen $a_1, \dots, a_{2\beta}$ unterkreuzen den x_2 -Henkel insgesamt p -mal, denn $p \cdot 2\beta = \alpha - 1$. Die in den Unterkreuzungspunkten $\alpha - 2\beta, \dots, \alpha - \beta$ des x_2 -Henkels beginnenden parallelen Bögen $c_1, \dots, c_{\beta+1}$ unterkreuzen den x_1 -Henkel in den noch verbleibenden Unterkreuzungspunkten $(2p - 1)\beta + 1, \dots, \alpha$, daraufhin enden $c_{\beta+1}, \dots, c_3$ an den Punkten $\alpha - \beta + 1, \dots, \alpha - 1$ des x_2 -Henkels, c_2 unterkreuzt den x_2 -Henkel im Punkt α und schließt an den Endpunkt von c_1 an.

Der Erzeugendenwechsel $y_2 = x_1 x_2$, $y_1 = x_1$ aus dem Beweis von Lemma 5 (siehe Abschnitt 2.2.1) läßt sich durch denselben Wechsel der Zerschneidung von H_2 wie im vorigen Abschnitt geometrisch realisieren. Aus der Heegaard-Zerlegung mit Fundamentalgruppendarstellung $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ und

$$R_{(\alpha, \beta)} = (x_1 x_2)^p x_1 \left((x_1 x_2)^{-p} x_1^{-1} (x_1 x_2)^p x_1 \right)^{\frac{|\beta|-1}{2}} (x_1 x_2)^{-p} x_2^{-1} \\ \cdot \left((x_1 x_2)^p x_1^{-1} (x_1 x_2)^{-p} x_1 \right)^{\frac{|\beta|-1}{2}}$$

wird eine Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht 2 desselben Knotenaußenraumes mit Fundamentalgruppendarstellung

$$\langle y_1, y_2 \mid y_2^p y_1 (y_2^{-p} y_1^{-1} y_2^p y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} y_2^{-p-1} y_1 \\ \cdot (y_2^p y_1^{-1} y_2^{-p} y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} \rangle.$$

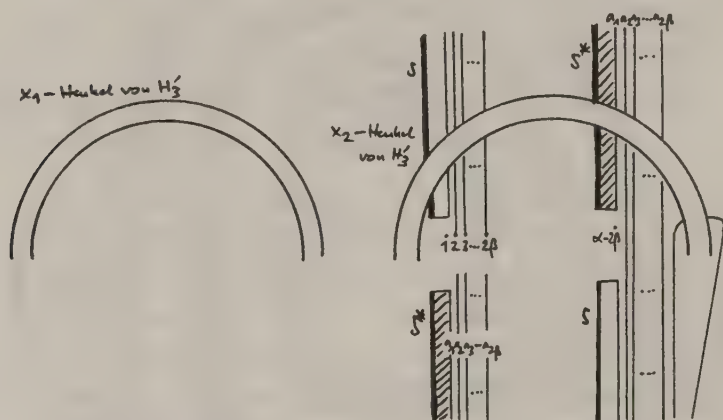
Der Erzeugendenwechsel $z_2 = y_2^p$ erfordert wieder eine Stabilisation. Wie im Beweis von Lemma 20 im vorigen Abschnitt entsteht aus dem Henkelkörper H_2 mit dem gebohrten Tunnel ein Henkelkörper vom Geschlecht 3, der ausgebohrte Tunnel entspricht einem z_2 -Henkel von H'_3 , deshalb geht der Henkelkörper H'_2 in einen Henkelkörper H'_3 vom Geschlecht 3 über. Der Tunnel wird wieder so gebohrt, daß die den x_2 -Henkel von H'_2 unterkreuzenden Bögen von γ vor dem Unterkreuzen über den z_2 -Henkel von H'_3 laufen.

Das Wort $z_2^{-1}y_2^p$ wird durch dieselbe einfach geschlossene Kurve s wie oben realisiert; sie besteht auf dem z_2 -Henkel von H'_3 aus $p-1$ Verbindungen des Typs $(0,1)$ und einer Verbindung des Typs $(-1,1-p)$. Die Verbindungen auf dem z_2 -Henkel werden mit p Bögen verbunden, die zuerst dem x_2 -Henkel von H'_3 und dann den x_1 -Henkel von H'_3 in positiver Richtung einmal unterkreuzen und die Ablesung y_2 besitzen.

Jetzt ist zu zeigen, daß die Kurven γ und s disjunkt realisierbar sind. Die Kurve s habe ihren Anfangspunkt neben dem x_2 -Henkel von H'_3 . Die Verbindung $(-1, p-1)$ von s auf dem z_2 -Henkel von H'_3 ist disjunkt zu γ realisierbar, denn γ besteht auf dem z_2 -Henkel nur aus Verbindungen des Typs $(0,1)$. Der Bogen von s mit Ablesung $(y_2 z_2^0)^{p-1} y_2$ läuft parallel zu den Bögen $a_1, \dots, a_{2\beta}$ von γ , d.h. er unterkreuzt den x_2 -Henkel zwischen den Unterkreuzungspunkten 0 und 1, dann den x_2 -Henkel zwischen β und $\beta+1$, läuft parallel zu $a_1, \dots, a_{2\beta}$ über den z_2 -Henkel, unterkreuzt den x_2 -Henkel zwischen 2β und $2\beta+1$, unterkreuzt daraufhin den x_1 -Henkel zwischen 3β und $3\beta+1$ usw., schließlich unterkreuzt s den x_2 -Henkel zwischen $\alpha-2\beta-1$ und $\alpha-2\beta$ und der restliche Bogen von s läuft parallel zu den Bögen $c_1, \dots, c_{\beta+1}$, unterkreuzt den x_1 -Henkel zwischen $(2p-1)\beta$ und $(2p-1)\beta+1$ und endet am Anfangspunkt.

$(H_3; \gamma, s)$ ist eine Heegaard-Zerlegung des Außenraumes von $b(\alpha, \beta)$, vgl. den Beweis von Lemma 20 im vorigen Abschnitt.

Die noch erforderlichen 2β Additionen der Kurve $s^{\pm 1}$ zur Kurve γ folgen der allgemeinen Bemerkung im Beweis von Lemma 20 im vorigen Abschnitt. Im vorliegenden Fall verlaufen die Bögen $a_1, \dots, a_{2\beta}$ von γ parallel zu einem Bogen von s mit Ablesung $(y_2 z_2^0)^{p-1} y_2$. Die Verbindungsstrecken der ersten Addition von s zu γ verlaufen zwischen dem Bogen s^* von s mit Ablesung $(y_2 z_2^0)^{p-1} y_2$ und a_1 bei den Unterkreuzungspunkten 1 bzw. $\alpha - 2\beta$ des x_2 -Henkels. Gemäß der allgemeinen Bemerkung enthält die Kurve $s + \gamma$ die Bögen s^* und a_1 nicht mehr.



Die Verbindungsstrecken der j -ten Addition, $1 \leq j \leq 2\beta$ verlaufen analog zwischen dem Bogen s^* von $s^{\pm 1}$ mit Ablesung $\left((y_2 z_2^0)^{p-1} y_2\right)^{\pm 1}$ und a_j bei den Unterkreuzungspunkten 1 bzw. $\alpha - 2\beta$ des x_2 -Henkels. Entsprechend der allgemeine Bemerkung entfallen nach der Addition jeweils die Bögen s^* und a_j .

Die nach den 2β Additionen erhaltene Kurve unterkreuzt den x_2 -Henkel

genau einmal und die Ablesung der Kurve geht aus der Ablesung von γ hervor, indem gemäß der Bemerkung $y_2^{\pm p}$ durch $z_2^{\pm 1}$ und y_2^{-p-1} durch $y_2^{-1} z_2^{-1}$ ersetzt wird. Aus der Kurve γ mit Ablesung

$$y_2^p y_1 (y_2^{-p} y_1^{-1} y_2^p y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} y_2^{-p-1} y_1 (y_2^p y_1^{-1} y_2^{-p} y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}}$$

entsteht nach den Additionen eine einfach geschlossene Kurve mit Ablesung

$$z_2 y_1 (z_2^{-1} y_1^{-1} z_2 y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} y_2^{-1} z_2^{-1} y_1 (z_2 y_1^{-1} z_2^{-1} y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}},$$

also ist die Gruppendarstellung

$$\langle y_1, y_2, z_2 \mid z_2^{-1} y_2^p, z_2 y_1 (z_2^{-1} y_1^{-1} z_2 y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} y_2^{-1} z_2^{-1} y_1 \\ \cdot (z_2 y_1^{-1} z_2^{-1} y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} \rangle$$

eine geometrische Darstellung des Außenraumes von $b(\alpha, \beta)$.

□

Aus Satz 2 (siehe Abschnitt 2.2.2), Lemma 21 und dem Satz [Osb, Th. 2.2] folgt:

Satz 8

Sei $b(\alpha, \beta)$ ein Knoten der Klasse 1.2, d.h. $(\alpha, \beta) = (p|\sigma| + 1, \frac{\sigma}{2})$, wobei $\frac{\sigma}{2} \in \mathbb{Z}$ ungerade, $|\sigma| > 2$ und $p > 1$ ist. Dann besitzt der Außenraum dieses Knotens mindestens drei nicht homöomorphe Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2 mit zugehörigen Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$, $\langle x_1, x_2 \mid K_{p,1}^{1,2} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ der Fundamentalgruppe des Knotenaußenraumes.

Beweis

Nach Lemma 21 und dem Satz [Os, Th. 2.2] ist die Darstellung

$$\langle y_1, z_2 \mid z_2^{-1} \left(z_2^{-1} y_1 (z_2 y_1^{-1} z_2^{-1} y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} z_2 y_1 \right. \\ \left. \cdot (z_2^{-1} y_1^{-1} z_2 y_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} \right)^p \rangle$$

geometrisch und wegen

$$x_2^{-1} \left(x_2^{-1} x_1 (x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} x_2 x_1 (x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1)^{\frac{|\beta|-1}{2}} \right)^p \doteq K_{p,1}^{1,2}$$

ist auch $\langle x_1, x_2 \mid K_{p,1}^{1,2} \rangle$ geometrisch. Insgesamt sind die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha,\beta)} \rangle$, $\langle x_1, x_2 \mid K_{p,1}^{1,2} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha,\beta')} \rangle$ geometrisch, nach Lemma 6 aus Abschnitt 2.2.1 sind sie nicht N -äquivalent. □

4.2.3 Die Knoten der Klasse 2.1

Lemma 22

Sei $b(\alpha, \beta)$ ein Knoten der Klasse 2.1, d.h. es ist $(\alpha, \beta) = (4pl + 1, 4pl + 1 - 2l)$, wobei $p, l \geq 1$ sind. Dann stammen die Darstellungen

$$\langle y_1, y_2, z_2 \mid z_2^{-1} y_2^p, y_2^{-1} (z_2^{-1} y_1 z_2 y_1^{-1})^l (z_2^{-1} y_1^{-1} z_2 y_1)^l \rangle$$

und

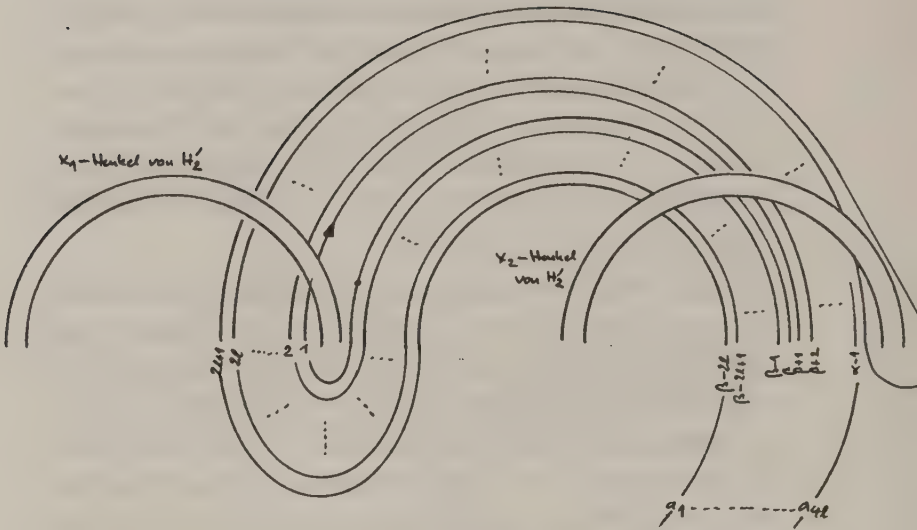
$$\langle y_1, y_2, z_2 \mid z_2^{-1} y_2^l, y_2^{-1} (z_2^{-1} y_1 z_2 y_1^{-1})^p (z_2^{-1} y_1^{-1} z_2 y_1)^p \rangle$$

von einer Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht 3 des Außenraumes von $b(\alpha, \beta)$ bzw. $b(\alpha, \beta')$.

Beweis

Es genügt, den ersten Fall zu betrachten, vgl. die Bemerkung in Abschnitt 2.3. Die Kurve γ der Heegaard-Zerlegung (H_2, γ) besteht aus zwei zu $p(v)$ parallelen Bögen b_1 und b_2 , die auf verschiedenen Seiten von $p(v)$ liegen und durch kleine Bögen an den Enden der Henkel von H'_2 geschlossen werden. Nach Konstruktion unterkreuzt γ den x_1 -Henkel und den x_2 -Henkel von H'_2 α -mal, die Unterkreuzungspunkte seien wieder der Reihe nach mit den Zahlen $1, \dots, \alpha$ bezeichnet.

Die Punkte β und $\beta + 1$ des x_2 -Henkels sind über einen den x_1 -Henkel im Punkt 1 unterkreuzenden Bogen miteinander verbunden, denn zwischen den Punkten β und $\beta + 1$ des x_2 -Henkels verläuft das Anfangsstück von $p(v)$. Parallel zu diesem Bogen werden die Punkte $\beta - 2l, \dots, \beta - 1$ des x_2 -Henkels durch $2l$ Bögen, die den x_1 -Henkel in $2, \dots, 2l + 1$ unterkreuzen mit den Punkten $\beta + 2, \dots, \alpha$ des x_2 -Henkels verbunden, der den Punkt $2l + 1$ des x_1 -Henkels kreuzende Bogen läuft am x_2 -Henkel vorbei und endet im Punkt α des x_2 -Henkels.



Die in den Unterkreuzungspunkten $\beta - 2l, \dots, \alpha - 1$ des x_2 -Henkels beginnenden parallelen Bögen von γ , die mit $a_1, \dots, a_{4l}$ bezeichnet seien, laufen zunächst am x_1 -Henkel vorbei, unterkreuzen ihn dann in negativer Richtung in den Punkten $2l+2, \dots, 6l+1$, unterkreuzen dann den x_2 -Henkel in den Punkten $\beta - 6l, \dots, \beta - 2l - 1$, laufen wieder außen am x_1 -Henkel vorbei, unterkreuzen ihn in negativer Richtung in den Punkten $6l+2, \dots, 10l+1$, anschließend den x_2 -Henkel in den Punkten $\beta - 10l, \dots, \beta - 6l - 1$ usw.; der x_2 -Henkel wird von den Bögen $a_1, \dots, a_{4l}$ beim j -ten Mal in den Punkten $\alpha - 4lj, \dots, \alpha - 1 - (j - 1)4l$ unterkreuzt und der x_1 -Henkel beim i -ten Mal in den Punkten $2l+2 + (i-1)4l, \dots, i4l+2l+1$. Weil $\alpha = 4pl+1$ ist, unterkreuzen die Bögen $a_1, \dots, a_{4l}$ den x_1 -Henkel insgesamt $(p-1)$ -mal, denn $(p-1)4l+2l+1 < \alpha$ und $p4l+2l+1 > \alpha$ und den x_2 -Henkel p -

mal. Die in den Punkten $1, \dots, 2l$ des x_2 -Henkels beginnenden parallelen Bögen $c_1, \dots, c_{2l}$ von γ unterkreuzen den x_1 -Henkel in den noch übrigen Punkten $(p-1)4l+2l+2, \dots, \alpha$ und enden in den Punkten $2l+1, \dots, 4l$ des x_2 -Henkels.

Der Erzeugendenwechsel $y_2 = x_1 x_2^{-1}$, $y_1 = x_1$ aus dem Beweis von Lemma 8 (siehe Abschnitt 2.3.1) läßt sich durch einen Wechsel der Zerschneidung von H_2 geometrisch realisieren, vgl. [Z 63]. Dazu wird die Meridiankurve des x_2 -Henkels von H_2 beibehalten und die Meridiankurve des x_1 -Henkels von H_2 durch eine einfach geschlossene Kurve ersetzt, die sich aus den Meridiankurven der beiden Henkel zusammensetzt. Nach Wahl der neuen Zerschneidung von H_2 entsteht aus der Heegaard-Zerlegung (H_2, γ) mit Fundamentalgruppendarstellung $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$, wobei

$$R_{(\alpha, \beta)} \doteq x_1 x_2^{-1} \left((x_1 x_2^{-1})^p x_1^{-1} (x_2 x_1^{-1})^p x_1 \right)^l \left((x_1 x_2^{-1})^p x_1 (x_2 x_1^{-1})^p x_1^{-1} \right)^l$$

eine Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht 2 desselben Knotenaußenraumes mit Fundamentalgruppendarstellung

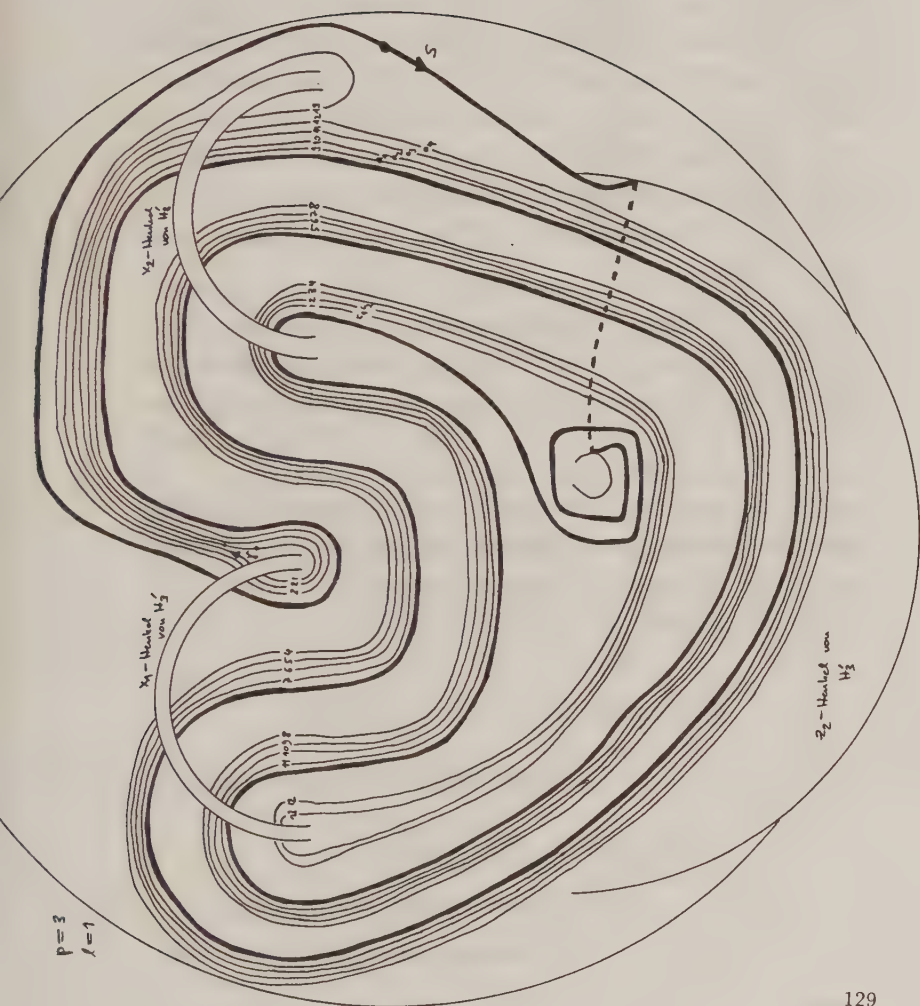
$$\langle y_1, y_2 \mid y_2 (y_2^p y_1^{-1} y_2^p y_1)^l (y_2^p y_1 y_2^{-p} y_1^{-1})^l \rangle.$$

Der zweite Erzeugendenwechsel $z_2 = y_2^p$ wird durch eine Stabilisation realisiert. Aus dem Henkelkörper H_2 entsteht mit dem gebohrten Tunnel ein Henkelkörper H_3 vom Geschlecht 3, der ausgebohrte Tunnel entspricht einem z_2 -Henkel von H_2' , deshalb geht der Henkelkörper H_2' in einen Henkelkörper H_3' vom Geschlecht 3 über. Der Tunnel wird so gebohrt, daß die den x_2 -Henkel von H_2' unterkreuzenden Bögen $a_1, \dots, a_{4l}$ und $c_1, \dots, c_{2l}$ über den z_2 -Henkel von H_3' laufen. Dann wird in eine das Wort $z_2^{-1} y_2^p$ realisierende einfach geschlossene Kurve s ein 2-Henkel geklebt. Diese

Kurve s besteht auf dem z_2 -Henkel von H'_3 aus einer Verbindung des Typs $(-1, p-1)$ und $p-1$ Verbindungen des Typs $(0, -1)$ und aus p Bögen mit Ableseung y_2 , die zuerst den x_2 -Henkel von H'_3 und dann den x_1 -Henkel von H'_3 einmal unterkreuzen, die Kurve s besitzt die Ableseung $z_2^{-1}(y_2 z_2^0)^{p-1} y_2$.

Jetzt ist zu zeigen, daß die Kurven γ und s disjunkt realisierbar sind. Die Kurve s habe ihren Anfangspunkt neben dem den x_2 -Henkel von H'_3 im Punkt α unterkreuzenden Bogen von γ . Die Verbindung $(-1, p-1)$ von s auf den z_2 -Henkel von H'_3 ist disjunkt zu γ realisierbar, denn γ besteht auf dem z_2 -Henkel nur aus Verbindungen des Typs $(0, 1)$. Der Bogen von s mit Ableseung $(y_2 z_2^0)^{p-1} y_2$ läuft parallel zu den Bögen $a_1, \dots, a_{4l}$, d.h. er unterkreuzt den x_2 -Henkel zwischen den Unterkreuzungspunkten 0 und 1, den x_1 -Henkel zwischen $4pl - 2l + 1$ und $4pl - 2l + 2$, läuft über den z_2 -Henkel, unterkreuzt den x_2 -Henkel zwischen $4l$ und $4l + 1$, den x_1 -Henkel zwischen $(p-1)4l - 2l + 1$ und $(p-1)4l - 2l + 2$, läuft über den z_2 -Henkel, unterkreuzt den x_2 -Henkel zwischen $8l$ und $8l + 1$ usw. nach dem letzten Unterkreuzen des x_2 -Henkels zwischen den Punkten $\alpha - 4l - 1$ und $\alpha - 4l$ läuft s parallel zu dem Bogen von γ , der den x_1 -Henkel im Punkt $2l + 1$ unterkreuzt, unterkreuzt den x_1 -Henkel zwischen $2l + 1$ und $2l + 2$ und endet am Anfangspunkt.

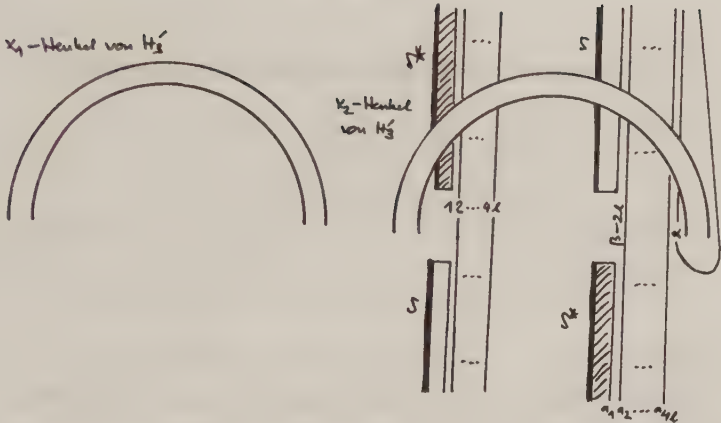
Die Kurve s ist also disjunkt zur Kurve γ realisierbar, denn die Verbindung $(-1, p-1)$ von s auf dem z_2 -Henkel von H'_3 ist disjunkt zu γ , der Bogen mit Ableseung $(y_2 z_2^0)^{p-1} y_2$ liegt parallel zu den Bögen $a_1, \dots, a_{4l}$ von γ , das letzte Stück von s läuft parallel zu dem Bogen von γ , der den x_1 -Henkel im Punkt $2l + 1$ unterkreuzt.



In die Kurve s läßt sich ein 2-Henkel einspannen, der bis auf seine Mantelfläche ganz im Äußeren des Henkelkörpers H_3 liegt, das folgt wie oben.

(H_3, γ, s) ist eine Heegaard-Zerlegung des Außenraumes von $b(\alpha, \beta)$, denn der Bogen $p(v)$, vgl. [Fu; §2] und den Beweis von Lemma 19 in Abschnitt 4.1, liegt innerhalb des Bereiches, den der in die Kurve γ eingeklebte 2-Henkel aus H'_3 herausschneidet und verbindet den Endpunkt der im x_1 -Henkel von H'_3 liegenden Brücke mit dem Anfangspunkt der im x_2 -Henkel von H'_3 verlaufenden Brücke. Die anderen beiden Endpunkte der Brücken werden durch den Bogen $p(u)$ miteinander verbunden, er verläuft innerhalb des Bereiches, den der erste Bogen von s mit Ablesung y_2 aus H'_3 herausschneidet.

Die noch erforderlichen $4l$ Additionen der Kurve $s^{\pm 1}$ zur Kurve γ folgen wieder der allgemeinen Bemerkung im Beweis von Lemma 20 im Abschnitt 4.2.1. Oben wurde gezeigt, daß die Bögen $a_1, \dots, a_{4l}$ parallel zu einem Bogen von s mit Ablesung $(y_2 z_2^0)^{p-1} y_2$ liegen. Die Verbindungsstrecken der ersten Addition von s^{-1} zu γ verlaufen zwischen dem Bogen s^* von s^{-1} mit Ablesung $y_2^{-1} (z_2^0 y_2^{-1})^{p-1}$ und a_1 bei den Unterkreuzungspunkten 1 bzw. $\beta - 2l$ des x_2 -Henkels. Gemäß der allgemeinen Bemerkung enthält die Kurve $s^{-1} + \gamma$ die Bögen s^* und a_1 nicht mehr.



Die Verbindungsstrecken der j -ten Addition, $1 \leq j \leq 4l$ verlaufen analog zwischen dem Bogen s^* von $s^{\pm 1}$ mit Ablesung $\left((y_2 z_2^0)^{p-1} y_2\right)^{\pm 1}$ und a_j bei den Unterkreuzungspunkten 1 bzw. $\beta - 2l$ des x_2 -Henkels. Entsprechend der allgemeinen Bemerkung entfallen nach der Addition jeweils die Bögen s^* und a_j .

Die nach den $4l$ Additionen enthaltene Kurve unterkreuzt den x_2 -Henkel von H'_3 genau einmal und die Ablesung der Kurve geht aus der Ablesung von γ hervor, indem gemäß der allgemeinen Bemerkung $y_2^{\pm p}$ durch $z_2^{\pm 1}$ und y_2^{p+1} durch $z_2 y_2$ ersetzt wird. Die Kurve γ besitzt die Ablesung

$$y_2^{p+1} y_1^{-1} y_2^{-p} y_1 (y_2^p y_1^{-1} y_2^{-p} y_1)^{l-1} (y_2^p y_1 y_2^{-p} y_1^{-1})^l,$$

folglich besitzt die nach den $4l$ Additionen entstandene Kurve die Ablesung

$$\begin{aligned} & z_2 y_2 y_1^{-1} z_2^{-1} y_1 (z_2 y_1^{-1} z_2^{-1} y_1)^{l-1} (z_2 y_1 z_2^{-1} y_1^{-1})^l \\ & \doteq y_2 (y_1^{-1} z_2^{-1} y_1 z_2)^l (y_1 z_2^{-1} y_1^{-1} z_2)^l. \end{aligned}$$

Insgesamt ist die Gruppendarstellung

$$\langle y_1, y_2, z_2 \mid z_2^{-1} y_2^p, y_2^{-1} (z_2^{-1} y_1 z_2 y_1^{-1})^l (z_2^{-1} y_1^{-1} z_2 y_1)^l \rangle$$

eine geometrische Darstellung des Außenraumes von $b(\alpha, \beta)$.

□

Aus Lemma 9 (siehe Abschnitt 2.3.2), Lemma 22 und dem Satz [Osb, Th. 2.2] folgt:

Satz 9

Seien $p, l \geq 1$ und $b(\alpha, \beta)$ ein Knoten der Klasse 2.1, d.h. $(\alpha, \beta) = (4pl + 1, 4pl + 1 - 2l)$.

- (1) Falls $p, l > 1$ und $p \neq l$ ist, besitzt der Außenraum von $b(\alpha, \beta)$ mindestens vier Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2, die nicht homöomorph sind mit zugehörigen Gruppendarstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$, $\langle x_2, x_2 \mid K_{p,1}^{2,1} \rangle$, $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{l,1}^{2,1} \rangle$ der Fundamentalgruppe des Knotenaußenraumes.
- (2) Falls $p, l > 1$ und $p = l$ ist, besitzt der Außenraum von $b(\alpha, \beta)$ mindestens zwei Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2, die nicht homöomorph sind mit zugehörigen Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid K_{p,1}^{2,1} \rangle$ der Fundamentalgruppe des Knotenaußenraumes.
- (3) Falls $p > 1$ und $l = 1$ oder $p = 1$ und $l > 1$ ist, besitzt der Außenraum von $b(\alpha, \beta)$ mindestens drei Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2, die nicht homöomorph sind mit zugehörigen Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$, $\langle x_1, x_2 \mid K_{p,1}^{2,1} \rangle$ bzw. $\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{l,1}^{2,1} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ der Fundamentalgruppe des Knotenaußenraumes.

Beweis

Nach dem Satz von Osborne [Osb, Th. 2.2] ist die Darstellung

$$\begin{aligned} & \langle y_1, z_2 \mid z_2^{-1} \left((z_2^{-1} y_1 z_2 y_1^{-1})^l (z_2^{-1} y_1^{-1} z_2 y_1)^l \right)^p \rangle \\ & \cong \langle x_1, x_2 \mid x_2^{-1} \left((x_2^{-1} x_1 x_2 x_1^{-1})^l (x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1)^l \right)^p \rangle \end{aligned}$$

geometrisch. Wegen

$$x_2^{-1} \left((x_2^{-1} x_1 x_2 x_1^{-1})^l (x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1)^l \right)^p \doteq K_{p,1}^{2,1}$$

ist auch die Darstellung $\langle x_1, x_2 \mid K_{p,1}^{2,1} \rangle$ geometrisch. Insgesamt sind also die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha,\beta)} \rangle$, $\langle x_1, x_2 \mid K_{p,1}^{2,1} \rangle$, $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha,\beta')} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{l,1}^{2,1} \rangle$ geometrisch, aus Lemma 9 (siehe Abschnitt 2.3.2) folgt die Behauptung. □

4.2.4 Die Knoten der Klasse 2.2

Lemma 23

Sei $b(\alpha, \beta)$ ein Knoten der Klasse 2.2, d.h. es ist $(\alpha, \beta) = (4pl - 1, 4pl - 1 - 2l)$, wobei $p, l \geq 1$ sind, aber nicht gleichzeitig gleich 1. Dann stammen die Darstellungen

$$\langle y_1, y_2, z_2 \mid z_2^{-1} y_2^p, y_2^{-1} (y_1 z_2^{-1} y_1^{-1} z_2)^l (y_1^{-1} z_2^{-1} y_1 z_2)^l \rangle$$

und

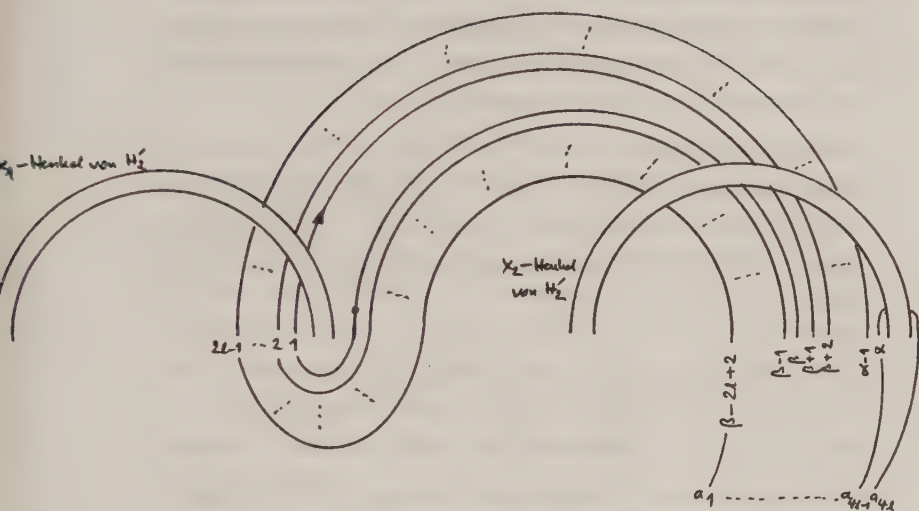
$$\langle y_1, y_2, z_2 \mid z_2^{-1} y_2^l, y_2^{-1} (y_1 z_2^{-1} y_1^{-1} z_2)^p (y_1^{-1} z_2^{-1} y_1 z_2)^p \rangle$$

von einer Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht 3 des Außenraumes von $b(\alpha, \beta)$ bzw. $b(\alpha, \beta')$.

Beweis

Es genügt wieder, den ersten Fall zu betrachten, vgl. die Bemerkung in Abschnitt 2.4. Die Kurve γ der Heegaard-Zerlegung (H_2, γ) , vgl. Lemma 19 in Abschnitt 4.1, besteht aus zwei zu $p(v)$ parallelen Bögen b_1 und b_2 , die auf verschiedenen Seiten von $p(v)$ liegen und durch kleine Bögen an den Enden der Henkel von H'_2 geschlossen werden. Nach Konstruktion unterkreuzt γ den x_1 -Henkel und den x_2 -Henkel von H'_2 α -mal, die Unterkreuzungspunkte seien wieder mit den Zahlen $1, \dots, \alpha$ bezeichnet.

Die Punkte β und $\beta + 1$ des x_2 -Henkels sind über einen den x_1 -Henkel im Punkt 1 unterkreuzenden Bogen miteinander verbunden, denn zwischen den Punkten β und $\beta + 1$ des x_2 -Henkels verläuft das Anfangsstück von $p(v)$. Parallel zu diesem Bogen werden die Punkte $\beta - 2l + 2, \dots, \beta - 1$ des x_2 -Henkels durch $2l - 2$ Bögen, die den x_1 -Henkel in $2, \dots, 2l - 1$ unterkreuzen mit den Punkten $\beta + 2, \dots, \alpha - 1$ des x_2 -Henkels verbunden.



Die in den Unterkreuzungspunkten $\beta - 2l + 2, \dots, \alpha - 1$ beginnenden Bögen von γ und der den Punkt α des x_2 -Henkels unterkreuzende Bogen seien mit $a_1, \dots, a_{4l}$ bezeichnet. Diese Bögen $a_1, \dots, a_{4l}$ laufen zunächst am x_1 -Henkel vorbei, unterkreuzen ihn dann in negativer Richtung in den Punkten $2l, \dots, 6l - 1$, unterkreuzen dann den x_2 -Henkel in den Punkten $\beta - 6l + 2, \dots, \beta - 2l + 1$, laufen wieder außen am x_1 -Henkel vorbei, unterkreuzen ihn in negativer Richtung in den Punkten $6l, \dots, 10l - 1$, anschließend den x_2 -Henkel in $\beta - 10l + 2, \dots, \beta - 6l + 1$ usw.; der x_2 -Henkel wird von den Bögen $a_1, \dots, a_{4l}$ beim j -ten Mal in den Punkten $\alpha + 2 - j4l, \dots, \alpha + 1 + (j - 1)4l$ unterkreuzt und der x_1 -Henkel beim i -ten Mal in den Punkten $i4l - 2l, \dots, i4l + 2l - 1$. Weil $\alpha = 4pl - 1$ ist, unterkreuzen die Bögen $a_1, \dots, a_{4l}$ den x_1 -Henkel insgesamt $(p - 1)$ -mal,

denn $(p-1)4l + 2l - 1 < \alpha$ und $p4l + 2l - 1 > \alpha$ und den x_2 -Henkel bis auf den Bogen a_{4l} insgesamt p -mal. Die in den Punkten $1, \dots, 2l$ des x_2 -Henkels beginnenden parallelen Bögen $c_1, \dots, c_{2l}$ von γ unterkreuzen den x_1 -Henkel in den noch übrigen Punkten $4pl - 2l, \dots, \alpha$ und enden in den Punkten $2l + 1, \dots, 4l$ des x_2 -Henkels.

Der Erzeugendenwechsel $y_2 = x_1 x_2^{-1}$, $y_1 = x_1$ aus dem Beweis von Lemma 11 (siehe Abschnitt 2.4.1) läßt sich durch denselben Wechsel der Zerschneidung von H_2 wie im vorigen Abschnitt realisieren. Aus der Heegaard-Zerlegung (H_2, γ) mit Fundamentalgruppendarstellung $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$, wobei

$$R_{(\alpha, \beta)} = x_1 x_2^{-1} \left(x_1^{-1} (x_1 x_2^{-1})^p x_1 (x_1 x_2^{-1})^{-p} \right)^l \cdot \left(x_1 (x_1 x_2^{-1})^p x_1^{-1} (x_1 x_2^{-1})^{-p} \right)^l$$

entsteht eine Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht 2 desselben Knotenaußenraumes mit Fundamentalgruppendarstellung

$$\langle y_1, y_2 \mid y_2 (y_1^{-1} y_2^p x_1 y_2^{-p})^l (y_1 y_2^p y_1^{-1} y_2^{-p})^l \rangle.$$

Der zweite Erzeugendenwechsel $z_2 = y_2^p$ aus dem Beweis von Lemma 11 (siehe Abschnitt 2.4.1) wird wieder durch eine Stabilisation realisiert. Der Tunnel wird so gebohrt, daß die den x_2 -Henkel unterkreuzenden Bögen $a_1, \dots, a_{4l}$ und $c_1, \dots, c_{2l}$ über den z_2 -Henkel von H'_3 laufen. Dann wird in eine das Wort $z_2^{-1} y_2^p$ realisierende einfach geschlossene Kurve s ein 2-Henkel geklebt. Diese Kurve s besteht wie im vorigen Abschnitt auf dem z_2 -Henkel von H'_3 aus einer Verbindung des Typs $(-1, p-1)$ und $p-1$ Verbindungen des Typs $(0, -1)$ und aus p Bögen mit Ablesung y_2 , die zuerst den x_2 -Henkel von H'_3 und dann den x_1 -Henkel von H'_3 einmal unterkreuzen, die Kurve s besitzt die Ablesung $z_2^{-1} (y_2 z_2^0)^{p-1} y_2$.

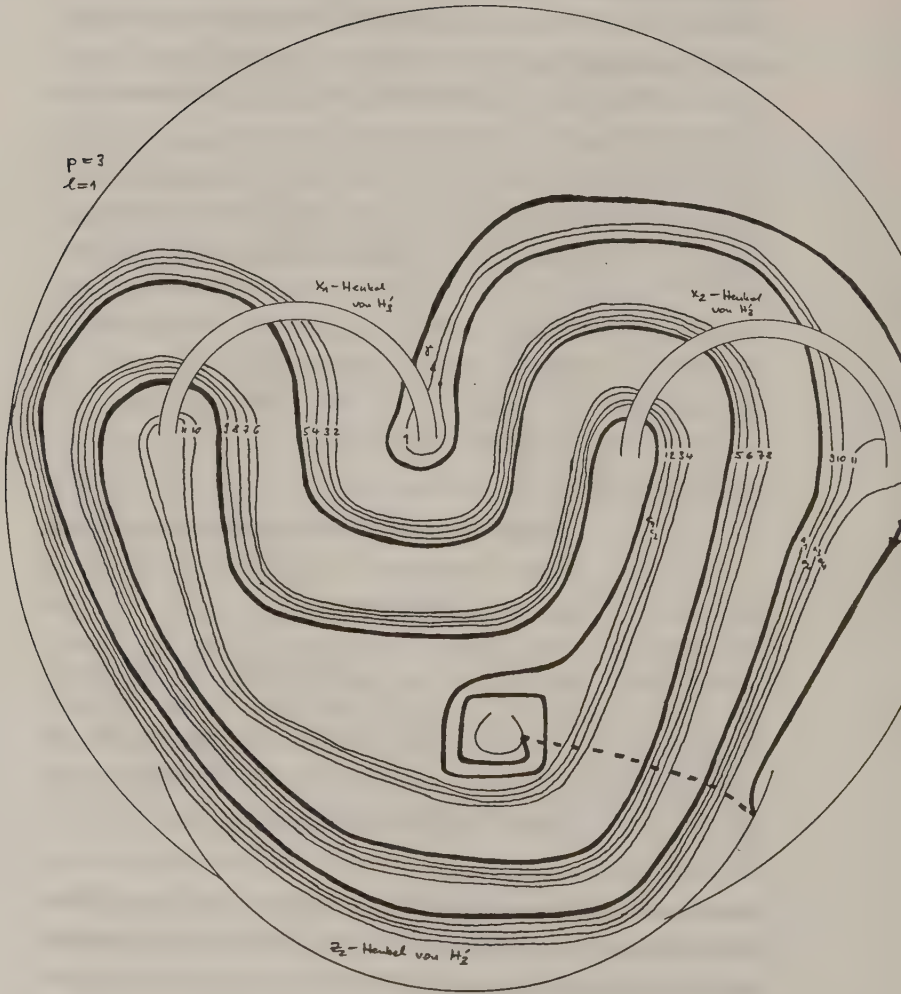
Jetzt ist zu zeigen, daß die Kurven γ und s disjunkt realisierbar sind. Die Kurve s habe ihren Anfangspunkt neben dem den x_2 -Henkel von H'_3 im Punkt α unterkreuzenden Bogen von γ . Die Verbindung $(-1, p-1)$ von s auf dem x_2 -Henkel von H'_3 ist disjunkt zu γ realisierbar, denn γ besteht auf dem z_2 -Henkel nur aus Verbindungen des Typs $(0, 1)$. Der Bogen von s mit Ablesung $(y_2 z_2^0)^{p-1} y_2$ läuft parallel zu den Bögen $a_1, \dots, a_{4l-1}$, d.h. er unterkreuzt den x_2 -Henkel zwischen den Unterkreuzungspunkten 0 und 1, den x_1 -Henkel zwischen $4pl - 2l - 1$ und $4pl - 2l$, läuft über den z_2 -Henkel von H'_3 , unterkreuzt den x_2 -Henkel zwischen $4l$ und $4l + 1$, den x_1 -Henkel zwischen $4pl - 6l - 1$ und $4pl - 6l$, läuft über den z_2 -Henkel, unterkreuzt den x_2 -Henkel zwischen $8l$ und $8l + 1$ usw., nach dem letzten Unterkreuzen des x_2 -Henkels zwischen den Punkten $\alpha - 4l + 1$ und $\alpha - 4l + 2$ läuft s parallel zu dem Bogen von γ , der den x_1 -Henkel im Punkt $2l - 1$ unterkreuzt, unterkreuzt den x_1 -Henkel zwischen $2l - 1$ und $2l$ und endet am Anfangspunkt.

Die Kurve s ist also disjunkt zur Kurve γ realisierbar, denn die Verbindung $(-1, p-1)$ von s auf dem z_2 -Henkel von H'_3 ist disjunkt zu γ , der Bogen mit Ablesung $(y_2 z_2^0)^{p-1} y_2$ liegt parallel zu den Bögen $a_1, \dots, a_{4l-1}$ von γ , das letzte Stück von s läuft parallel zu dem Bogen von γ , der den x_1 -Henkel im Punkt $2l - 1$ unterkreuzt, vgl. die Skizze auf der nächsten Seite.

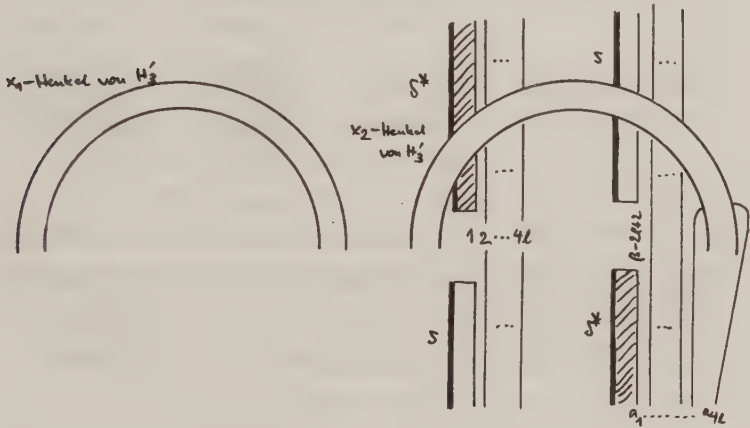
Wie oben folgt, daß sich in die Kurve s ein 2-Henkel einkleben läßt, der bis auf seine Mantelfläche ganz im Äußeren des Henkelkörpers H_3 liegt; $(H_3; \gamma, s)$ ist eine Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht 3 des Außenraumes von $b(\alpha, \beta)$.

Die noch erforderlichen $4l$ Additionen der Kurve $s^{\pm 1}$ zur Kurve γ folgen wieder der allgemeinen Bemerkung im Beweis von Lemma 20 im Abschnitt 4.2.1. Oben wurde gezeigt, daß die Bögen $a_1, \dots, a_{4l-1}$ parallel zu einem Bogen von s mit Ablesung $(y_2 z_2^0)^{p-1} y_2$ liegen und a_{4l} parallel zu einem

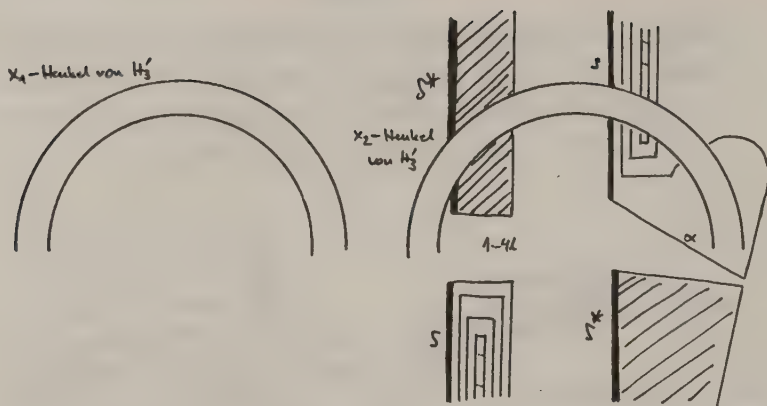
$p=3$
 $\ell=1$



Bogen von s mit Ablesung $(y_2 z_2^0)^{p-1}$. Die Verbindungsstrecken der ersten Addition von s^{-1} zu γ liegen zwischen dem Bogen s^* von s^{-1} mit Ablesung $y_2^{-1} (z_2^0 y_2^{-1})^{p-1}$ und a_1 bei den Unterkreuzungspunkten 1 bzw. $\beta - 2l + 2$. Die Kurve $s^{-1} + \gamma$ enthält die Bögen s^* und a_1 nicht mehr.



Die Verbindungsstrecken der j -ten Addition, $1 \leq j \leq 4l - 1$ verlaufen analog zwischen dem Bogen s^* von $s^{\pm 1}$ mit Ablesung $((y_2 z_2^0)^{p-1} y_2)^{\pm 1}$ und a_j bei den Unterkreuzungspunkten 1 bzw. $\beta - 2l + 2$ des x_2 -Henkels. Entsprechend der allgemeinen Bemerkung entfallen nach der Addition jeweils die Bögen s^* und a_j . Die Verbindungsstrecken der $4l$ -ten Addition liegen zwischen s^* und a_{4l} bei den Unterkreuzungspunkten 1 und α des x_2 -Henkels.



Die nach den $4l$ Additionen erhaltene Kurve unterkreuzt den x_2 -Henkel von H'_3 genau einmal und die Ablesung der Kurve geht aus der Ablesung von γ hervor, indem gemäß der allgemeinen Bemerkung $y_2^{\pm p}$ durch $z_2^{\pm 1}$ und y_2^{-p+1} durch $y_2 z_2^{-1}$ ersetzt wird. Die Kurve γ besitzt die Ablesung

$$(y_1^{-1} y_2^p y_1 y_2^{-p})^l (y_1 y_2^p y_1^{-1} y_2^{-p})^{l-1} y_1 y_2^p y_1^{-1} y_2^{-p+1},$$

deshalb besitzt die nach den $4l$ Additionen entstandene Kurve die Ablesung

$$\begin{aligned} & (y_1^{-1} z_2 y_1 z_2^{-1})^l (y_1 z_2 y_1^{-1} z_2^{-1})^{l-1} y_1 z_2 y_1^{-1} y_2 z_2^{-1} \\ & \doteq y_2 (z_2^{-1} y_1^{-1} z_2 y_1)^l (z_2^{-1} y_1 z_2 y_1^{-1})^l. \end{aligned}$$

Also ist die Gruppendarstellung

$$\langle y_1, y_2, z_2 \mid z_2^{-1} y_2^p, y_2^{-1} (y_1 z_2^{-1} y_1^{-1} z_2)^l (y_1^{-1} z_2^{-1} y_1 z_2)^l \rangle$$

eine geometrische Darstellung des Außenraumes von $b(\alpha, \beta)$.

□

Aus Lemma 12 (siehe Abschnitt 2.4.2), Lemma 23 und dem Satz [Osb, Th. 2.2] folgt:

Satz 10

Seien $p, l \geq 1$, aber nicht gleichzeitig gleich 1 und sei $b(\alpha, \beta)$ ein Knoten der Klasse 2.2, d.h. $(\alpha, \beta) = (4pl - 1, 4pl - 1 - 2l)$.

- (1) Falls $p, l > 1$ und $p \neq l$ ist, besitzt der Außenraum von $b(\alpha, \beta)$ mindestens vier Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2, die nicht homöomorph sind mit zugehörigen Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$, $\langle x_1, x_2 \mid K_{p,1}^{2,2} \rangle$, $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{l,1}^{2,2} \rangle$ der Fundamentalgruppe des Knotenaußenraumes.
- (2) Falls $p, l > 1$ und $p = l$ ist, besitzt der Außenraum von $b(\alpha, \beta)$ mindestens zwei Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2, die nicht homöomorph sind mit zugehörigen Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid K_{p,1}^{2,2} \rangle$ der Fundamentalgruppe des Knotenaußenraumes.
- (3) Falls $p > 1$ und $l = 1$ oder $p = 1$ und $l > 1$ ist, besitzt der Außenraum von $b(\alpha, \beta)$ mindestens drei Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2, die nicht homöomorph sind mit zugehörigen Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$, $\langle x_1, x_2 \mid K_{p,1}^{2,2} \rangle$ bzw. $\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{l,1}^{2,2} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ der Fundamentalgruppe des Knotenaußenraumes.

Beweis

Nach dem Satz [Osb, Th. 2.2] ist die Gruppendarstellung

$$\begin{aligned} & \langle y_1, z_2 \mid z_2^{-1} \left((y_1 z_2^{-1} y_1^{-1} z_2)^l (y_1^{-1} z_2^{-1} y_1 z_2)^l \right)^p \rangle \\ & \cong \langle x_1, x_2 \mid x_2^{-1} \left((x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2)^l (x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2)^l \right)^p \rangle \end{aligned}$$

geometrisch, wegen

$$x_2^{-1} \left((x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2)^l (x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2)^l \right)^p \doteq K_{p,1}^{2,2}$$

ist auch die Darstellung $\langle x_1, x_2 \mid K_{p,1}^{2,2} \rangle$ geometrisch. Insgesamt sind also die Darstellungen $\langle x_1, x_2, \mid R_{(\alpha,\beta)} \rangle$, $\langle x_1, x_2 \mid K_{p,1}^{2,2} \rangle$, $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha,\beta')} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{l,1}^{2,2} \rangle$ geometrisch, aus Lemma 12 (siehe Abschnitt 2.4.2) folgt dann die Behauptung. □

4.3 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt sollen noch einmal die Ergebnisse der vorigen Kapitel zusammengefaßt werden.

Definitionsgemäß enthalten die Klassen 1.1, 1.2, 2.1 und 2.2 die 2-Brückenknoten $b(\alpha, \beta) = b(\alpha, \beta')$ mit den folgenden Normalformen:

Klasse 1.1

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= (p|\sigma| - 1, \frac{\sigma}{2}) \\ \beta' &= \begin{cases} -\alpha + 2p, & \frac{\sigma}{2} > 0 \\ \alpha - 2p, & \frac{\sigma}{2} < 0 \end{cases} \\ \text{mit } p > 1, \frac{\sigma}{2} \in \mathbb{Z} \text{ ungerade, } |\sigma| > 2. \end{aligned}$$

Klasse 1.2

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= (p|\sigma| + 1, \frac{\sigma}{2}) \\ \beta' &= \begin{cases} \alpha - 2p, & \frac{\sigma}{2} > 0 \\ -\alpha + 2p, & \frac{\sigma}{2} < 0 \end{cases} \\ \text{mit } p > 1, \frac{\sigma}{2} \in \mathbb{Z} \text{ ungerade, } |\sigma| > 2. \end{aligned}$$

Klasse 2.1

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= (p\sigma + 1, \alpha - \frac{\sigma}{2}) \\ \beta' &= -\alpha + 2p \\ \text{mit } p \geq 1, \frac{\sigma}{2} \geq 2 \text{ gerade.} \end{aligned}$$

Klasse 2.2

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= (p\sigma - 1, \alpha - \frac{\sigma}{2}) \text{ und } (\alpha, -\beta) \\ \beta' &= \alpha - 2p \\ \text{mit } p \geq 1, \frac{\sigma}{2} \geq 2 \text{ gerade; nicht} \\ &\text{gleichzeitig } p = 1 \text{ und } \frac{\sigma}{2} = 2. \end{aligned}$$

Für die gefundenen Gruppendarstellungen gilt:

(1) Knoten der Klasse 1.1

Sei $(\alpha, \beta) = (p|\sigma| - 1, \frac{\sigma}{2})$ mit $\frac{\sigma}{2} \in \mathbb{Z}$ ungerade, $|\sigma| > 2$ und $p > 1$. Seien $j_1, \dots, j_t$ die verschiedenen Teiler von p einschließlich 1 und p . Dann gilt:

- (i) Die Gruppendarstellungen $\langle x_1, x_2 \mid K_{j_1, q_1}^{1,1} \rangle, \dots, \langle x_1, x_2 \mid K_{j_t, q_t}^{1,1} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ sind nicht N -äquivalent.
- (ii) Von den Gruppendarstellungen aus (i) sind nur die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle, \langle x_1, x_2 \mid K_{p,1}^{1,1} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ geometrisch.

(2) Knoten der Klasse 1.2

Sei $(\alpha, \beta) = (p|\sigma| + 1, \frac{\sigma}{2})$ mit $\frac{\sigma}{2} \in \mathbb{Z}$ ungerade, $|\sigma| > 2$ und $p > 1$. Seien $j_1, \dots, j_t$ die verschiedenen Teiler von p einschließlich 1 und p . Dann gilt:

- (i) Die Gruppendarstellungen $\langle x_1, x_2 \mid K_{j_1, q_1}^{1,2} \rangle, \dots, \langle x_1, x_2 \mid K_{j_t, q_t}^{1,2} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ sind nicht N -äquivalent.
- (ii) Von den Gruppendarstellungen aus (i) sind nur die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle, \langle x_1, x_2 \mid K_{p,1}^{1,2} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ geometrisch.

(3) Knoten der Klasse 2.1

Sei $(\alpha, \beta) = (p\sigma + 1, \alpha - \frac{\sigma}{2})$ mit $\frac{\sigma}{2} = 2l \geq 2$ gerade und $p \geq 1$. Seien $j_1, \dots, j_{t_1}$ die verschiedenen Teiler von p einschließlich 1 und p und $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{t_2}$ die verschiedenen Teiler von l einschließlich 1 und l . Dann gilt:

- (i) Falls $p, l > 1$ und $p \neq l$ ist, sind die Gruppendarstellungen $\langle x_1, x_2 \mid K_{j_1, q_1}^{2,1} \rangle, \dots, \langle x_1, x_2 \mid K_{j_{t_1}, q_{t_1}}^{2,1} \rangle, \langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{\tilde{x}_1, y_1}^{2,1} \rangle, \dots, \langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{\tilde{x}_{t_2}, y_{t_2}}^{2,1} \rangle$ nicht N -äquivalent. Von diesen Gruppendarstellungen sind nur die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle, \langle x_1, x_2 \mid K_{p,1}^{2,1} \rangle, \langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{l,1}^{2,1} \rangle$ geometrisch.

- (ii) Falls $p, l > 1$ und $p = l$ ist, sind die Gruppendarstellungen $\langle x_1, x_2 \mid K_{j_1, q_1}^{2,1} \rangle, \dots, \langle x_1, x_2 \mid K_{j_{t_1}, q_{t_1}}^{2,1} \rangle$ nicht N -äquivalent, von diesen Gruppendarstellungen sind nur die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid K_{p,1}^{2,1} \rangle$ geometrisch.
- (iii) Falls $p > 1$ und $l = 1$ oder $p = 1$ und $l > 1$ ist, sind die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid K_{j_1, q_1}^{2,1} \rangle, \dots, \langle x_1, x_2 \mid K_{j_{t_1}, q_{t_1}}^{2,1} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ bzw. $\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{\tilde{x}_1, y_1}^{2,1} \rangle, \dots, \langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{\tilde{x}_{t_2}, y_{t_2}}^{2,1} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ nicht N -äquivalent. Von diesen Darstellungen sind nur $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$, $\langle x_1, x_2 \mid K_{p,1}^{2,1} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ bzw. $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$, $\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{l,1}^{2,1} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ geometrisch.

(4) Knoten der Klasse 2.2

Sei $(\alpha, \beta) = (p\sigma - 1, \alpha - \frac{\sigma}{2})$ mit $\frac{\sigma}{2} = 2l \geq 2$ gerade und $p \geq 1$, p und l seien nicht gleichzeitig gleich 1. Seien $j_1, \dots, j_{t_1}$ die verschiedenen Teiler von p einschließlich 1 und p und $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{t_2}$ die verschiedenen Teiler von l einschließlich 1 und l . Dann gilt:

- (i) Falls $p, l > 1$ und $p \neq l$ ist, sind die Gruppendarstellungen $\langle x_1, x_2 \mid K_{j_1, q_1}^{2,2} \rangle, \dots, \langle x_1, x_2 \mid K_{j_{t_1}, q_{t_1}}^{2,2} \rangle, \langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{\tilde{x}_1, y_1}^{2,2} \rangle, \dots, \langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{\tilde{x}_{t_2}, y_{t_2}}^{2,2} \rangle$ nicht N -äquivalent. Von diesen Gruppendarstellungen sind nur die Darstellungen $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$, $\langle x_1, x_2 \mid K_{p,1}^{2,2} \rangle$, $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{l,1}^{2,2} \rangle$ geometrisch.
- (ii) Falls $p, l > 1$ und $p = l$ ist, sind die Gruppendarstellungen $\langle x_1, x_2 \mid K_{j_1, q_1}^{2,2} \rangle, \dots, \langle x_1, x_2 \mid K_{j_{t_1}, q_{t_1}}^{2,2} \rangle$ nicht N -äquivalent, von diesen Darstellungen sind nur $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid K_{p,1}^{2,2} \rangle$ geometrisch.

- (iii) Falls $p > 1$ und $l = 1$ oder $p = 1$ und $l > 1$ ist, sind die Gruppendarstellungen $\langle x_1, x_2 \mid K_{j_1, q_1}^{2,2} \rangle, \dots, \langle x_1, x_2 \mid K_{j_{t_1}, q_{t_1}}^{2,2} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ bzw. $\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{\tilde{x}_1, y_1}^{2,2} \rangle, \dots, \langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{\tilde{x}_{t_2}, y_{t_2}}^{2,2} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ nicht N -äquivalent. Von diesen Gruppendarstellungen sind nur $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$, $\langle x_2, x_2 \mid K_{p,1}^{2,2} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$ bzw. $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta')} \rangle$, $\langle x_1, x_2 \mid \tilde{K}_{l,1}^{2,2} \rangle$ und $\langle x_1, x_2 \mid R_{(\alpha, \beta)} \rangle$ geometrisch.

Dieselben Aussagen gelten auch für Knoten mit einer Normalform $(\alpha, -\beta)$.

Literatur

- [BRZ] Boileau, M.; M. Rost; H. Zieschang: On Heegaard decompositions of torus knot exteriors and related Seifert fibre spaces. *Math. Ann.* (1988), 553 – 581
- [B] Brunner, A.M.: A group with an infinite number of Nielsen inequivalent one-relator presentations. *J. Algebra* 42 (1976), 81 – 84
- [BuZ] Burde, G.; H. Zieschang: *Knots*. Berlin: de Gruyter 1985
- [C] Collins, D.: Presentations of the amalgamated free product of two infinite cycles. *Math. Ann.* 237 (1978), 233 – 241
- [Fu] Funcke, K.: Nicht frei äquivalente Darstellungen von Knoten-
gruppen mit einer definierenden Relation. *Math. Z.* 141 (1975),
205 – 217
- [LS] Lyndon, C.L.; P.E. Schupp: *Combinatorial Group Theory*.
Ergebn. Math. Grenzgeb. 89. Berlin – Heidelberg – New York
1977
- [MKS] Magnus, W.; A. Karras; D. Solitar: *Combinatorial Group The-
ory*. New York, Dover Publ. 1976
- [McP] McCool, J.; A. Pietrowski: On free products with amalgamation
of two infinite cyclic groups. *J. Algebra* 18 (1971), 377 – 383
- [Os81] Osborne, R.P.: Knots with Heegaard genus 2 complements are
invertible. *Proc. A.M.S.* 81 (1981), 501 – 502
- [Os83] Osborne, R.P.: An algorithm for checking property P for knots
with complements of Heegaard genus 2. *Proc. A.M.S.* 88 (1983),
357 – 362

- [Schu] Schubert, H.: Knoten mit zwei Brücken. Math. Z. 65 (1956), 133 – 170
- [S] Singer, J.: Three-dimensional manifolds and their Heegaard diagrams. Trans. A.M.S. 35 (1933), 88 – 111
- [Trot] Trotter, H.F.: Non-invertible knots exist. Topology 2 (1964), 275 – 280
- [Z 62] Zieschang, H.: Über einfache Kurven auf Vollbrezeln. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 25 (1962), 231 – 250
- [Z 63] Zieschang, H.: Über einfache Kurvensysteme auf einer Vollbrezel vom Geschlecht 2. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 26 (1963), 237 – 247
- [Z 63'] Zieschang, H.: Classification of simple systems of paths on a solid pretzel of genus 2. Soviet Math. Doklady 4 (1963), 1460 – 1463
- [Z 77] Zieschang, H.: Generators of the free product with amalgamation of two infinite cyclic groups. Math. Ann. 277 (1977), 195 – 221

Johannes Tipp
Querenburger Höhe 100
4630 Bochum 1

Lebenslauf

Persönliche Daten

Johannes Tipp, geboren am 18.3.1960 in Gelsenkirchen
als Sohn des Organisten KMD Gerhard Tipp und
Hildegard Tipp, geb. Janda

Schulausbildung

1966 — 1970	Besuch der kath. Grundschule Bochum, Arndtstr. 21a
1970 — 1979	Besuch der Goethe-Schule in Bochum
17.5.1979	Abiturprüfung

Studium

WS 79/80	Immatrikulation an der Ruhr-Universität Bochum für das Fach Mathematik mit Nebenfach Physik
18.1.1985	Diplom in Mathematik

Bisherige berufl. Tätigkeit

Seit dem 2.9.1985 wissenschaftliche Hilfskraft an der
Fakultät für Mathematik der Ruhr-Universität Bochum

